

Інститут фізики Національної академії наук України

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

Стриженко Сергій Сергійович

УДК 535-4, 535.5

Дисертація

Дослідження та чисельне моделювання джерел світла з
квантовими властивостями на основі багаторівневих
атомів

104 «Фізика та астрономія»

10 «Природничі науки»

Подається на здобуття наукового ступеня *доктора філософії*

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

С.С. Стриженко



Науковий керівник
д.ф.-м.н., академік НАН України
Яценко Леонід Петрович

Київ 2023

Анотація

Стриженко С.С. Дослідження та чисельне моделювання джерел світла з квантовими властивостями на основі багаторівневих атомів — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 104 «Фізика та астрономія» (10 — «Природничі науки») — Інститут фізики Національної академії наук України, Київ, 2023

У дисертаційній роботі представлені результати досліджень кількох джерел квантового світла на основі багаторівневих атомів.

По-перше, експериментально реалізовано та чисельно змодельовано джерело біфотонів на основі резонансної чотирихвильової взаємодії з використанням чотирьох рівнів рубідію-87 — двох надтонких рівнів основного стану та двох збуджених рівнів тонкої структури. Чисельне моделювання ґрунтується на описі взаємодії лазерного світла з речовиною в одновимірному оптично товстому середовищі з подвійним заломленням, що використовує формалізм матриці густини та наближення *rotating wave approximation* та *Weißkopf-Wigner approximation*. Такий підхід дозволив відтворити взаємодію багаторівневих атомів із урахуванням магнітних підрівнів кожного рівня зі світлом будь-якої поляризації та визначити просторовий розподіл і часову еволюцію як квантового стану атомів, так і комплексних амплітуд полів. Для забезпечення можливості проведення чисельного моделювання протягом реалістичного часу за використанням звичайних персональних комп'ютерів програму було оптимізовано методом напіввекторизації. Незважаючи на те, що при чисельному моделюванні використано напівкласичне наближення, за його допомогою визначено поляризаційні характеристики однофотонних полів у джерелі біфотонів на основі чотирихвильової взаємодії.

По-друге, розроблену методику використано для чисельного моделювання квантового за природою явища раманівської суперфлуоресценції в трирівневій схемі в просторово неоднорідному середовищі. Її результати було використано для розробки експериментальної схеми спостереження явища раманівської суперфлуоресценції в порожнистих світловодах, що заповнені холодними атомами рубідію-87. Результати експериментальних досліджень кількісно і якісно описуються чисельним експериментом. Запропоновано просту модель явища суперфлуоресценції в неоднорідних середовищах, яка ґрунтується на концепції ефективного числа атомів, задіяних у колективному випромінюванні і пояснює всі особливості цього явища.

По-третє, теоретично досліджено джерело одиночних фотонів на основі нерезонансної схеми з трирівневим атомом у одномодовому резонаторі, що складається з одного ідеального дзеркала та одного напівпрозорого. Розвинуто теорію взаємодії такого резонатора з напівнескінченим одновимірним середовищем, і на її основі показано, що така схема дозволяє простим способом створювати фотон ба-

жаної хвильової форми за вимогою. Це досягається в певному режимі взаємодії, який забезпечує створення фотона без заселення квантового стану резонатора.

Ключові слова: джерела квантового світла, багаторівневі атоми, джерела бі-фотонів, подвійне заломлення, поляризоване світло, чотирихвильова взаємодія, суперфлуоресценція

Abstract

S. Stryzhenko. Researching and numerical modelling sources of light with quantum properties based on multi-level atoms — Qualifying scientific work on rights of a manuscript

Thesis for degree of *Doctor of Philosophy* on specialty 104 *Physics and Astronomy* (10 — *Natural Sciences*) — Institute of Physics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2023

The thesis presents results of experimental, theoretical, and numerical research of several quantum light sources based on multi-level atoms.

Firstly, we experimentally implemented and numerically simulated a source of biphotons based on resonant four-wave mixing. The source utilizes four levels of rubidium-87, including two hyperfine levels of the ground state and two excited levels of the fine structure. The numerical simulation, based on the equations describing the interaction between laser light and matter in a one-dimensional medium of high optical depth and high birefringence, employs the density matrix formalism and rotating wave and Weißkopf-Wigner approximations. This approach accurately reproduces interaction between multi-level atoms and light, considering degeneracy by the magnetic quantum number. To enable realistic time simulations on conventional personal computers, the simulation was optimized using the half-vectorization method. Despite utilizing semiclassical approximation, the simulation allowed to determine polarization of the one-photon field generated by the source of biphotons.

Secondly, the proposed simulation was also used to numerically model Raman superfluorescence in a three-level scheme within a spatially inhomogeneous medium. The simulation results were utilized to design an experimental setup for researching Raman superfluorescence in hollow waveguides filled with laser-cooled atoms of rubidium-87. The obtained results aligned both qualitatively and quantitatively with experimental data. Following the experiments and numerical simulations, a simple theoretical model of superfluorescence in inhomogeneous media was proposed. This model relies on the concept of maximal number of atoms collectively participating in the initial superfluorescent burst, providing an explanation for all observed properties of the phenomenon.

Finally, the thesis delves into the theoretical exploration of a single-photon source consisting of a single three-level atom coupled to a single-mode cavity, where one mirror is semi-transparent. A theory describing the interaction between this source and a semi-

infinite one-dimensional bath was developed. This theory demonstrated that, under specific regime of interaction where quantum state of the cavity is unpopulated, the source can produce a photon of desired shape on demand.

Keywords: sources of quantum light, multi-level atoms, sources of biphotons, birefringence, polarized light, four-wave mixing, superfluorescence

Список публікацій автора дисертації за її темою

Статті у періодичних наукових виданнях

- ¹A. Bruns, C.-Y. Hsu, S. Stryzhenko, E. Giese, L. P. Yatsenko, I. A. Yu, T. Halfmann, and T. Peters, “Ultrabright and narrowband intra-fiber biphoton source at ultralow pump power”, [Quantum Science and Technology](#) **8**, 015002 (2022).
- ²A. Saharyan, B. Rousseaux, Z. Kis, S. Stryzhenko, and S. Guérin, “Propagating single photons from an open cavity: description from universal quantization”, [Phys. Rev. Res.](#) **5**, 033056 (2023).
- ³S. Stryzhenko, A. Bruns, and T. Peters, *N Scaling of large-sample collective decay in inhomogeneous ensembles*, submitted to [Phys. Rev. Res.](#), 2023, [arXiv:2307.11623 \[quant-ph\]](#).

Виступи на наукових конференціях

- ¹S. Stryzhenko, “Four-wave mixing with Rubidium-87 in a hollow-core fiber”, in [LIMQUET conference](#) (Sept. 19–23, 2021).
- ²A. Bruns, C.-Y. Hsu, S. Stryzhenko, E. Giese, L. Yatsenko, I. A. Yu, T. Halfmann, and T. Peters, “Narrowband biphoton source of maximal spectral brightness at ultralow pump power”, in [The 27th International Conference on Atomic Physics](#) (July 17–22, 2022), p. 313.
- ³A. Bruns, C.-Y. Hsu, S. Stryzhenko, E. Giese, L. Yatsenko, I. Yu, T. Halfmann, and T. Peters, “Ultrabright and narrowband intra-fiber biphoton source at ultralow pump power”, in [DPG-Frühjahrstagung 2023, Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft](#), edited by B. Nunner (Mar. 5–10, 2023), p. 150.
- ⁴S. Stryzhenko, “Numerical research of coherent interaction between laser light of arbitrary polarization and atoms of a complex level structure with resolved hyperfine structure”, in [Resonance phenomena in atomic systems](#) (Sept. 19–21, 2023).

Зміст

Визнання внеску колег і співавторів	7
Перелік скорочень	9
Вступ	12
1 Постановка задачі	16
2 Огляд джерел квантового світла	18
2.1 Особливості джерел квантового світла	18
2.2 Кількісне вимірювання «однофотонності» світла	19
2.3 Кореляційні характеристики біфотонів	22
2.4 Яскравість імовірнісних джерел	23
2.5 Спектральні характеристики фотонів	24
2.6 Огляд детерміністичних джерел	24
2.7 Огляд імовірнісних джерел	25
3 Чисельна модель	28
3.1 Огляд чисельних досліджень із атомами складної структури	28
3.1.1 Електромагнітно індукована прозорість	28
3.1.2 Натрієві опорні зірки	33
3.2 Вимоги до чисельної моделі	37
3.2.1 Врахування поляризації світла	38
3.2.2 Математичне представлення поляризації	38
3.2.3 Виродження за магнітним квантовим числом	39
3.2.4 Подвійне заломлення в оптичних волокнах	41
3.2.5 Інші вимоги	43
3.3 Основні рівняння чисельної моделі	45
3.3.1 Квантові оператори в матричній формі	45
3.3.2 Поширення світла	45
3.3.3 Часова еволюція квантового стану атомів	47
3.4 Початкові та граничні умови	49
3.5 Оптимізація чисельної моделі	49
3.5.1 Векторизація	49

3.5.2	Вираження ермітових матриць у дійсних числах	51
3.5.3	Векторизація неермітових матриць	54
3.5.4	Векторизація ермітової частини матриці	55
3.5.5	Виділення константних матриць	56
3.6	Вибір чисельних методів	58
3.7	Висновки до розділу 3	58
4	Джерело біфотонів на основі чотиривильової взаємодії	60
4.1	Порожнисте оптичне волокно НСРСВGF	60
4.2	Рубідій-87 та надтонка структура його D-лінії	62
4.3	Завантаження атомів усередину волокна	63
4.4	Принцип роботи джерела біфотонів на основі FWM	66
4.5	Розділення мод	67
4.6	Схема експерименту	68
4.7	Кореляційні характеристики випромінених біфотонів	70
4.8	Теоретична модель крос-кореляції біфотонів	74
4.9	Вплив потужності накачки на характеристики джерела біфотонів	76
4.10	Вплив оптичної товщини середовища на характеристики джерела біфотонів	78
4.11	Висновки до розділу 4	80
5	Суперфлуоресценція в неоднорідному середовищі	82
5.1	Вступ	82
5.2	Ефективна дворівнева схема	83
5.3	Схема експерименту	84
5.4	Профіль суперфлуоресцентного імпульса	86
5.5	Вплив кількості атомів на SF-імпульси	86
5.6	Максимальне колективне число атомів	88
5.7	Просторовий розподіл поля накачки	90
5.8	Порівняння вкладів неоднорідного уширення та послаблення накачки у MCN	94
5.9	Результати чисельного моделювання SF	95
5.10	Висновки до розділу 5	103
6	Джерело одиночних фотонів на основі одномодового резонатора	105
6.1	Вступ	105
6.2	Гамільтоніан у картині Шредінгера	106
6.2.1	Істинно-модове представлення	106
6.2.2	Внутрішньо-зовнішнє представлення	109
6.2.3	Математична неузгодженість марківської моделі	111
6.2.4	Псевдомодове представлення	113

6.2.5	Порівняння різних представлень	114
6.3	Динаміка системи в картині Гейзенберга	116
6.3.1	Рівняння часової еволюції для операторів	118
6.3.2	Інтегровані оператори навколишнього поля	120
6.3.3	Фотонний потік	122
6.4	Рівняння часової еволюції для матриці густини	123
6.5	Модель джерела фотонів	125
6.6	Контроль за формою фотона	127
6.7	Висновки до розділу 6	132
	Висновки	133
	Список літератури	136

Визнання внеску колег і співавторів

Автор дисертації дякує за співпрацю:

- науковому керівникові дисертації доктору фізико-математичних наук, академіку НАН України *Леоніду Петровичу Яценку* за керівництво теоретичними та чисельними дослідженнями, а також за те, що познайомив автора з науковою спільнотою;
- проєктові **LIMQUET** за фінансування викладених у дисертації досліджень;
- експериментальній групі «Нелінійна та квантова оптика» (нім. *Nichtlineare Optik und Quantenoptik*) із Інституту прикладної фізики Технічного університету Дармштадта (нім. *Institut für Angewandte Physik der Technischen Universität Darmstadt*):
 - керівникові групи професору Томасу Халфману (нім. *Thomas Halfmann*) за організацію співробітництва в рамках проєкту **LIMQUET**;
 - старшому досліднику доктору Торстену Петерсу (нім. *Thorsten Peters*) за керівництво та проведення експериментальних досліджень;
 - досліднику групи доктору Александру Брунсу (нім. *Alexander Bruns*) за значний вклад в експериментальні дослідження;
 - тодішньому аспірантові, зараз доктору Фабіану Ціпурі (нім. *Fabian Cipura*) та магістрантці групи Марієтті Коелле (нім. *Marietta Coelle*) за допомогу в побутових питаннях під час роботи автора в Технічному університеті Дармштадта;
- теоретичній групі з Інтердисциплінарної лабораторії Карно Університету Бургундії (фр. *Laboratoire Interdisciplinaire Carnot de l'Université Bourgogne*):
 - керівникові групи та координатору проєкту **LIMQUET** професору Стефану Герану (фр. *Stéphane Guérin*) за керівництво, а аспірантці Астгік Сахарян (фр. *Astghik Saharyan*) — за співпрацю в теоретичному дослідженні джерела одиночних фотонів;
 - аспірантам Гохар Оганесян (фр. *Gohar Hovhannessyan*), Сав'єру Лафоргу (фр. *Xavier Laforgue*), Родольфу Мом'єру (фр. *Rodolphe Momier*) та Чжу Цзінцзюнь (кит. 祝晶俊, ПУ /zhù jīng jùn/) за допомогу в побутових питаннях під час відрядження до Університету Бургундії;
- аспіранту Лабораторії наднизькотемпературних атомів (кит. трад. 超低温原子實驗室, ПУ /chāo dī wēn yuán zǐ shí yàn shì/) Національного університету Цінхуа (кит. трад. 國立清華大學, ПУ /guó lì jīng huá dà xué/) Сю Цзяю

(**кит.** 徐嘉佑, **PY** /xú jiā yù/), що працював у Технічному університеті Дармштадта в рамках проекту **LIMQUET**, за значний внесок в експериментальне дослідження джерела біфотонів на основі чотирихвильової взаємодії;

- аспіранту Факультету фізики Університету Оксфорда (**англ.** *Department of Physics of the Oxford University*) Марку Ейспеерту (**нід.** *Mark Ijspeert*), що працював у Технічному Університеті Дармштадта за відрядженням у рамках проекту **LIMQUET**, за допомогу в чисельних дослідженнях та надання доступу до 64-ядерного університетського суперкомп'ютера.

Перелік скорочень

- APD** лавинний фотодіод (avalanche photodiode)
- CPT** когерентне полонення населеностей (coherent population trapping)
- cQED** квантова електродинаміка резонаторів (cavity quantum electrodynamics)
- DB** виміряна (детектована) яскравість (detected brightness)
- DFR** dark funnel repumper
- DLCZ** протокол квантової пам'яті, також застосовується як джерело одиночних фотонів. Названий на честь авторів: Luming **Duan** (кит. 段路明, Pinyin /duàn lù míng/), Mikhail **Lukin** (рос. *Михаил Дмитриевич Лукин*), Juan Ignacio **Cirac** Sasturain, Peter **Zoller**
- ECDL** діодний лазер із зовнішнім резонатором (external cavity diode laser)
- EIT** електромагнітно індукована прозорість (electromagnetically induced transparency)
- FORT** далеко відстроєна пастка (far off-resonant trap)
- FWHM** ширина на рівні половини висоти піка (full width at half-maximum)
- FWM** чотирихвильова взаємодія (four-wave-mixing)
- GB** генерована яскравість (generated brightness)
- GSB** генерована спектральна яскравість (generated spectral brightness)
- GSBP** генерована спектральна яскравість на одиницю потужності накачки (generated spectral brightness per pump power)
- HBT** ефект Хенбері-Брауна і Твісса (Hanbury-Brown and Twiss effect)
- HCPCBGF** порожнисте оптичне волокно з фотонним кристалом (hollow-core photonic crystal band gap fiber)

- LIMQUET** «Інтерфейси між світлом та речовиною для квантово вдосконалених технологій» (англ. *Light-Matter Interfaces for Quantum Enhanced Technology*)
- MCN** максимальне колективне число атомів (maximum cooperation number)
- MOT** магнітно-оптична пастка (magneto-optical trap)
- NA** чисельна апертура (numerical aperture)
- OD** оптична товщина (optical depth)
- PBS** поляризуючий світлоділитель (polarizing beam splitter)
- PY** транскрипція китайської мови (путунхуа) за системою Hanyu Pinyin
- RJ** транскрипція японської мови за системою Хепберна (позначення походить від яп. ローマ字, RJ /rōmaji/ — дослівно «римські літери»)
- RWA** наближення хвилі, що обертається (rotating wave approximation)
- SF** суперфлуоресценція (superfluorescence)
- SPCM** детектор одиночних фотонів (single-photon counting module)
- SPDC** спонтанне параметричне розсіювання (spontaneous parametric down-conversion)
- SR** супервипромінення (superradiance), також відоме як надвипромінення (рос. *сверхизлучение*) або ефект Діке, за іменем дослідника Роберта Генрі Діке (англ. *Robert Henry Dicke*)
- STIRAP** вимушений раманівський адиабатичний перехід (stimulated Raman adiabatic passage)
- TLS** дворівнева система (two-level system)
- англ.** англійська мова
- кит.** китайська мова (використовується у випадках, коли варіанти в традиційній та спрощеній орфографії співпадають)
- кит. трад.** китайська мова (в традиційній орфографії)
- нід.** нідерландська мова
- нім.** німецька мова

рос. російська мова

фр. французька мова

яп. японська мова

італ. італійська мова

Вступ

Обґрунтування вибору теми дослідження

Одними з найбільш глобальних проблем, якими займається сучасна квантова фізика, є квантові обчислення та квантова комунікація [1]. Ці квантові технології стали об'єктом протистояння між США та Китаєм [2, 3]: обидві держави вкладають у них мільярди доларів [4–7]. Європейський Союз також приєднався до змагань, запустивши в 2018 році десятирічну програму Quantum Technologies Flagship із бюджетом в 1 мільярд євро [8, 9].

Ідеальним носієм квантової інформації є фотон: по-перше, фотони рухаються зі швидкістю світла та не взаємодіють із іншими фотонами; по-друге, фотонами можна маніпулювати за допомогою лінійної оптики [10, 11]. Однак класичне світло, включаючи світло лазерів, не може безпосередньо використовуватися як носій квантової інформації, оскільки число фотонів у ньому не є визначеним. Тому для використання в квантовій інформатиці необхідно створювати джерела світла, які мають неklasичні (або квантові) властивості.

На сьогоднішній день існують два типи джерел квантового світла: перші здатні генерувати один фотон «на вимогу», але після кожного фотона їх треба заново переводити в початковий квантовий стан; другі випромінюють фотони випадково, але здатні генерувати їх у великих кількостях за одиницю часу. Останній тип джерел квантового світла випромінює не одиночні фотони, а пари квантово сплутаних фотонів. Таким чином, задетектувавши один фотон, можна бути впевненим у наявності іншого фотона, не детектуючи його.

Незважаючи на те, що протягом останніх десятиліть приділяється надзвичайно велика увага дослідженню властивостей існуючих джерел квантового світла та розробці нових типів таких джерел, велика кількість питань усе ще залишається невирішеною. Одним таким питанням є врахування реальної багаторівневої структури атомів, які використовуються для генерації різних типів квантового світла.

Таким чином, темою дисертаційної роботи було обрано дослідження та чисельне моделювання джерел світла з квантовими властивостями, що ґрунтуються на використанні багаторівневих атомів.

У межах цієї теми, по-перше, досліджується джерело неklasичного світла на основі резонансної чотирихвильової взаємодії (англ. *four-wave mixing*, FWM) на холодних атомах рубідію-87, завантажених у порожнисте оптичне волокно. Це є важливим прикладом джерел випадкових біфотонів. Таке джерело дозволяє досягти максимально можливої кількості випромінених за одиницю часу фотонів, при якій сусідні фотони вже починають перекриватися в часі.

По-друге, вивчається джерело одиночних фотонів на основі трирівневих втомів, що взаємодіють із одномодовим резонатором. Це джерело дозволяє створювати один фотон на вимогу. Перевагою такого джерела є здатність у певному ре-

жимі взаємодії контролювати форму випроміненого фотона.

По-третє, досліджується явище раманівської суперфлуоресценції (англ. *superfluorescence*, SF) холодних атомів рубідію в порожнистому оптичному волокні. Під час цього процесу генерується короткий імпульс раманівського випромінювання, який є класичним світлом, але його статистичні властивості визначаються квантовими флуктуаціями. Дослідження цього явища є важливим для глибшого розуміння фізики взаємодії квантового світла з багаторівневими реальними атомами (у даному разі атоми рубідію-87).

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами

Дисертаційна робота виконувалась у відділі когерентної та квантової оптики Інституту фізики Національної академії наук України в рамках наступних наукових тем:

- 1.4.В/185. «Розвиток фізичних основ лазерів з керованими параметрами та дослідження квантових і когерентних явищ при взаємодії їх випромінювання з речовиною у різному агрегатному стані» (номер держ. реєстр. 0117U002611),
- 1.4. В/210. «Генерація висококогерентних лазерних полів, розробка методів і засобів керування їх характеристиками та дослідження квантових ефектів у взаємодії атомів, молекул, нано- та мікрочасток з лазерними полями з контрольованими параметрами» (номер держ. реєстр. 0117U002612),
- 1.4. ВЦ/188. «Фундаментальні процеси, що визначають властивості новітніх фізичних об'єктів та матеріалів для електроніки, оптоелектроніки, фотоніки та спінтроніки» (номер держ. реєстр. 0117U002612).

Експериментальні та частина чисельних досліджень виконувалися в Інституті прикладної фізики Технічного університету Дармштадта (нім. *Institut für Angewandte Physik der Technischen Universität Darmstadt*), а частина теоретичних досліджень — у Міждисциплінарній лабораторії Карно Університету Бургундії (фр. *Laboratoire Interdisciplinaire Carnot de l'Université de Bourgogne*). Дослідження виконувалися в рамках проекту Європейського Союзу «Інтерфейси між світлом та речовиною для квантово вдосконалених технологій» (англ. *Light-Matter Interfaces for Quantum Enhanced Technology*, LIMQUET) [12].

Особистий внесок автора дисертації

Автор дисертації спільно з науковим керівником розробив, самостійно оптимізував і запрограмував мовою Python чисельну модель, описану в розділах 3.3 та 3.5, і

використав її для супроводу експериментів, описаних у розділах 4 та 5. Разом із науковою групою Інституту прикладної фізики Технічного університету Дармштадта автор брав участь у постановці та теоретичному супроводі цих експериментів, в обробці отриманих даних та їх аналізі, в обговоренні отриманих результатів і в підготовці публікацій [13, 14] до друку. Під час проведення теоретичних досліджень, описаних у розділі 6, спільно з науковою групою Міждисциплінарної лабораторії Карно Університету Бургундії автор брав участь у розробці теорії взаємодії трирівневних атомів із резонатором, обговоренні та аналізі отриманих результатів і підготовці до друку статті [15].

Апробація результатів дисертації

Основні результати дисертації були представлені у вигляді доповідей в усних та стендових доповідях на вітчизняних та міжнародних конференціях:

- International Conference and Workshop *Light-Matter Interfaces for Quantum Enhanced Technologies* (LIMQUET 2021), Oxford, UK (2021);
- *27th International conference on Atomic Physics* (ICAP2022), Toronto, Canada (2022);
- *DPG Spring Meeting of the Atomic, Molecular, Quantum Optics and Photonics Section* (SAMOP), Hannover, Germany, (2023);
- International conference *Resonance phenomena in atomic systems* (to the 85th anniversary of Academician Otto Shpenik), Uzhhorod, Ukraine (2023);
- *Підсумкова наукова конференція Інституту фізики НАН України*, Київ, Україна (2022);
- запрошена доповідь на *Підсумковій науковій конференції Інституту фізики НАН України*, Київ, Україна (2023);

Публікації

Результати дисертації опубліковано у 7 наукових роботах:

- дві статті у періодичних наукових виданнях *Quantum Science and Technology* [13] та *Physical Review Research* [14], проіндексованих у базах даних *Web of Science* та *Scopus*, та віднесених до першого квартилю (Q1) відповідно до класифікації *SCImago Journal and Country Rank*;

- одна стаття подана до друку до журналу Physical Review Research (проіндексованого Web of Science та Scopus, віднесеного до першого квартилю відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank) та опублікована у вигляді препрінту в репозиторії arXiv [15];
- чотири тези доповідей на міжнародних наукових конференціях [16—19].

Структура роботи

Дисертація складається зі вступу, 6 розділів, висновків та списку літератури. У розділі 1 поставлено мету та задачі дисертаційної роботи, а розділ 2 присвячено огляду різних типів існуючих джерел квантового світла. Розділ 3 присвячено чисельній моделі, що описує взаємодію атомів зі складною структурою рівнів та світла довільної поляризації. Два наступні розділи описують експерименти, які були чисельно модельовані за допомогою описаної в попередніх розділах методики: у розділі 4 представлено створення джерела квантово сплутаних пар фотонів на основі FWM, а у розділі 5 розглядається суперфлуоресценція в неоднорідно збудженому середовищі. У розділі 6 теоретично описано джерело одиночних фотонів на основі одномодового резонатора з втратами.

Розділ 1

Постановка задачі

Метою дисертаційної роботи є дослідження та чисельне моделювання кількох джерел світла з квантовими властивостями, що ґрунтуються на використанні багаторівневих атомів: випадкового джерела пар квантово сплутаних фотонів на основі чотирихвильової взаємодії в холодних атомах рубідію-87 із урахуванням їхньої реальної структури енергетичних рівнів, одноатомного джерела одиночних фотонів на основі трирівневих атомів, що взаємодіють із одномодовим резонатором, а також явища раманівської суперфлуоресценції холодних атомів рубідію-87 у неоднорідному середовищі.

Для досягнення цієї мети в роботі поставлено наступні задачі:

1. Створити чисельну модель взаємодії багаторівневих атомів із лазерним світлом довільної поляризації в одновимірному оптично товстому середовищі з подвійним заломленням. Модель повинна враховувати виродження рівнів за магнітним квантовим числом.
2. Створити та експериментально дослідити джерело квантово сплутаних пар фотонів на основі спонтанної чотирихвильової взаємодії на лазерно охолоджених атомах рубідію-87, завантажених усередину порожнистого оптичного волокна з фотонним кристалом і забороненою зоною **НСРСВGF**. За допомогою розробленої в пункті 1 чисельної моделі визначити поляризаційні характеристики однофотонних полів, їхню залежність від поляризації накачки та контрольного поля. Кількісно визначити ступінь неklasичності випроміненого джерелом світла, а також ступінь квантової сплутаності фотонів.
3. Експериментально, теоретично і чисельно (за допомогою розробленої в пункті 1 чисельної моделі) дослідити явище раманівської суперфлуоресценції на лазерно охолоджених атомах рубідію-87, завантажених усередину **НСРСВGF**. Визначити та теоретично пояснити залежність

параметрів суперфлуоресцентного імпульса від кількості атомів, а також від інтенсивності та частоти поля накачки.

4. Теоретично і чисельно дослідити одноатомне джерело одиночних фотонів на основі трирівневих атомів, що взаємодіють із резонатором із одним ідеальним дзеркалом і одним напівпрозорим. Вивести з перших принципів і чисельно порівняти три представлення для опису такого джерела: істинномодове, внутрішньо-зовнішнє та псевдомодове. Визначити квантові оператори для фізичних величин, які характеризують випромінєні джерелом фотони, і розрахувати їхню динаміку в різних режимах взаємодії.

Розділ 2

Огляд джерел квантового світла

У цьому розділі ми оглянемо різні типи джерел квантового світла — як детерміністичних, так і ймовірнісних, і перерахуємо їхні переваги та недоліки.

2.1 Особливості джерел квантового світла

Для початку розглянемо, чим відрізняються джерела квантового світла від класичних загальноновживаних джерел світла, таких як термічні, газорозрядні, світлодіодні чи лазерні джерела. Основна відмінність полягає в квантових властивостях випромінюваного світла. Навіть якщо для опису класичних джерел світла необхідно використовувати квантову механіку, саме випромінене світло є класичним і може розглядатися як електромагнітна хвиля, що поширюється відповідно до рівнянь Максвелла.

За низьких інтенсивностей класичне світло веде себе згідно з законами квантової механіки, і його слід розглядати вже не як класичну електромагнітну хвилю, а як квантоване поле, що складається з фотонів. Однак кількість фотонів у такому світлі не є однозначно визначеною. Наприклад, монохроматичне світло, яке випромінює ідеальний лазер, перебуває у так званому *когерентному*, або *глауберівському* (на честь Роя Дджея Глаубера, [англ. Roy Jay Glauber](#)) стані:

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.1)$$

Тут стан $|n\rangle$ — це так званий *фоківський стан* (на честь радянського фізика Владіміра Фока, [рос. Владимир Александрович Фок](#)), тобто стан із точно визначеною кількістю фотонів n , а α — комплексний параметр когерентного стану.

Формула (2.1) означає, що кількість фотонів у когерентному стані є випадковою величиною з пуасонівським розподілом і математичним сподіванням $|\alpha|^2$. Із

рисунка 2.1 ми бачимо, що навіть за значень α , коли ймовірність отримати один фотон є максимальною ($|\alpha|^2 = 1$), ця ймовірність досягає лише $1/e \approx 0.37$.

Світло ж від теплових джерел має іншу статистику фотонів, що описується класичною ймовірністю

$$P(n) = \frac{\langle n \rangle^n}{(1 + \langle n \rangle)^{n+1}}. \quad (2.2)$$

Для теплового джерела ймовірність одного фотона є максимальною також за середнього значення $\langle n \rangle = 1$, складаючи $P(n=1) = 1/4$.

Тому, хоча низькоінтенсивне світло від класичних джерел і має квантові властивості, але джерелами квантового світла їх не називають. Для створення одиночних фотонів, необхідних для квантової інформатики та квантових комунікацій, використовують спеціальні джерела.

Ідеальне джерело одиночних фотонів мало би задовольняти три вимоги [20]:

- випромінення одного фотона із ймовірністю 100%;
- випромінення фотона «на вимогу», тобто за зовнішнім сигналом, а також не випромінення фотонів за відсутності такого сингала;
- велика кількість випромінених фотонів за одиницю часу.

На сьогодні таких ідеальних джерел одиночних фотонів не існує. Хоча джерела, які називаються «джерелами фотонів», випромінюють один фотон із високою ймовірністю, але між можливістю отримувати фотон на вимогу та швидкістю їх випромінення доводиться обирати. Таким чином, джерела фотонів можна поділити на дві групи: *детерміністичні*, що створюють один фотон на вимогу, і *ймовірнісні*, що створюють фотони у випадкові моменти часу, але здатні видавати значну їх кількість за одиницю часу [20—22]. Останній тип випромінює не одиночні фотони, а так звані *біфотони* — квантово сплутані пари фотонів. Джерела обох типів ми оглянемо далі в цьому розділі, а зараз перелічимо показники, що кількісно характеризують джерела квантового світла.

2.2 Кількісне вимірювання «однофотонності» світла

Для кількісної характеристики «однофотонності» випроміненого джерелом світла можна використовувати ефект Хенбері-Брауна і Твісса (англ. *Hanbury Brown and Twiss*, **HBT**). Установка для спостереження цього ефекту складається зі світлоділителя з коефіцієнтом пропускання $|t|^2 = 1/2$ та двох детекторів одиночних фотонів (англ. *single photon counting module*, **SPCM**). Цю установку зображено на рисунку 2.2.

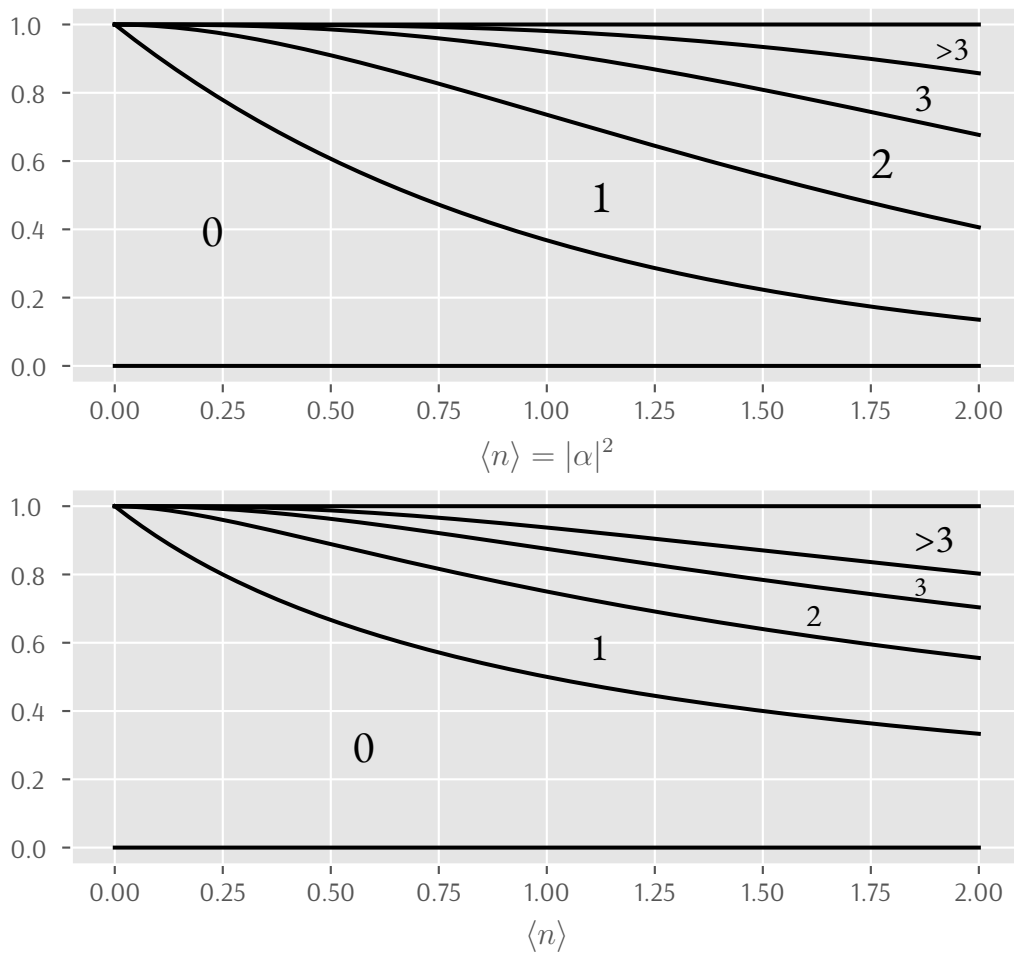


Рисунок 2.1: Розподіл імовірностей детектування n фотонів у когерентному стані $|\alpha\rangle$ в залежності від $|\alpha|^2$ (**верхній графік**) та в тепловому світлі в залежності від середньої кількості фотонів $\langle n \rangle$ (**нижній графік**). Вертикальна відстань між **лініями чорного кольору** дорівнює ймовірності задетектувати кількість фотонів, позначену **цифрою** у відповідній області.

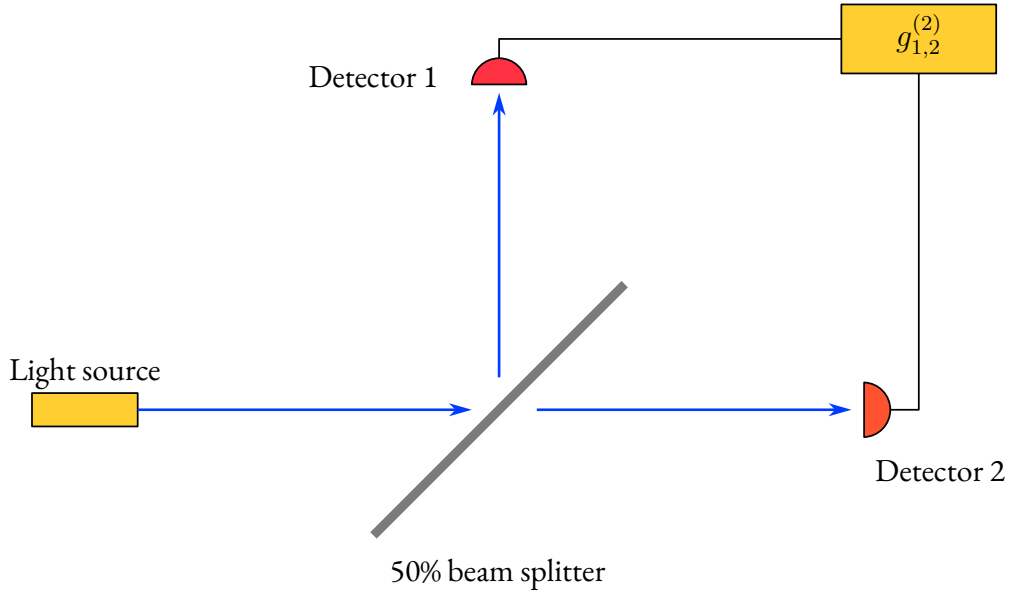


Рисунок 2.2: Схема установки Хенбері-Брауна і Твісса

Оскільки світлоділитель не змінює частоту ані відбитого, ані пропущеного світла, то однофотонне світло він не здатен розділити на два фотони — інакше порушувався би закон збереження енергії. Замість цього світлоділитель із імовірністю $|t|^2$ пропускає фотон, а з імовірністю $|r|^2$ — відбиває. Тут t — амплітудний коефіцієнт пропускання, а r — відбиття, для яких $|t|^2 + |r|^2 = 1$. Таким чином, поле після проходження через світлоділитель знаходиться в квантовому стані [23]

$$|\psi\rangle = (ta_t^+ + ra_r^+) |\emptyset_t, \emptyset_r\rangle = t |\rightsquigarrow_t, \emptyset_r\rangle + r |\emptyset_t, \rightsquigarrow_r\rangle, \quad (2.3)$$

де індекс t позначає пропущене поле, а індекс r — відбите. Таким чином, ми або детектуємо фотон у відбитому полі, або у пропущеному, але не в жодному і не в обох одночасно. Це означає, що події детектування фотонів у двох полях є залежними з точки зору теорії ймовірностей подіями, а в термінах квантової механіки поля в такому стані є квантово сплутаними.

Щоб охарактеризувати квантову сплутаність полів, використаємо коефіцієнт кореляції другого порядку [24]:

$$g_{t,r}^{(2)} = \frac{\langle a_t^+ a_r^+ a_t a_r \rangle}{\langle a_t^+ a_t \rangle \langle a_r^+ a_r \rangle} = \frac{p_{t,r}}{p_t p_r}, \quad (2.4)$$

де друга рівність представляє собою класичне співвідношення імовірностей: $p_{t,r}$ — імовірність одночасного детектування пропущеного та відбитого фотона, а p_t та p_r — відповідні імовірності детектування окремо пропущеного або відбитого фотона. Знаменник у другій рівності є ймовірністю випадкового співпадіння, ніби

дві моди не є скорельованими. Оскільки в установці НВТ досліджуються фотони, випромінені одним і тим само джерелом в одну і ту само моду, то коефіцієнт $g_{t,r}^{(2)}$ ще називають *автокореляцією*. Таким чином, $g_{a,b}^{(2)} = 1$ означає, що пропущене та відбите поля не є скорельованими, а відхилення від цього значення означає їхню взаємозалежність із точки зору теорії ймовірностей.

Для когерентного світла автокореляція становить $g_{t,r}^{(2)}(\tau) = 1$ незалежно від затримки між подіями детектування τ , а для теплового $1 \leq g_{t,r}^{(2)}(\tau) \leq 2$, причому $g_{t,r}^{(2)}(\tau=0) = 2$ [23, section 2.6.1]. Для однофотонного світла, оскільки одночасно задетектувати обидва фотони неможливо, то $g_{t,r}^{(2)}(\tau=0) = 0$. Тому в експерименті НВТ спостерігається антикореляція (англ. *anti-bunching*) $g_{t,r}^{(2)}(\tau=0) \simeq 0 < 1$ [23, section 2.6.2].

2.3 Кореляційні характеристики біфотонів

Ймовірнісні джерела — ті, що випромінюють фотони випадково, але здатні видавати їх у великих кількостях за одиницю часу — насправді випромінюють не одиничні фотони, а так звані біфотони. *Біфотон* — це двомодове поле, що може знаходитись у двох (базисних) станах: або в жодній із мод фотонів немає, або кожна має один фотон:

$$|\psi\rangle = C_0 |\emptyset, \emptyset\rangle + C_1 |\rightsquigarrow, \rightsquigarrow\rangle. \quad (2.5)$$

Тобто біфотон не може мати фотон лише в одній своїй моді (тобто бути в стані $|\rightsquigarrow, \emptyset\rangle$ або $|\emptyset, \rightsquigarrow\rangle$), а також не може мати більш як один фотон у будь-якій моді — навіть якщо кількість фотонів в обох модах співпадає. Таким чином, детектування фотонів у модах із точки зору теорії ймовірностей є залежними подіями, а відповідні моди, як і у випадку НВТ, є квантово сплутаними. Отже, задетектувавши фотон в одній моді, можна бути впевненими, що і друга мода має один (і тільки один) фотон, навіть не детектуючи його.

Оскільки ми маємо справу з квантово сплутаними парами фотонів, то в якості кількісної характеристики ми також використаємо кореляцію інтенсивності другого порядку:

$$g_{a,b}^{(2)} = \frac{\langle \hat{a} + \hat{b} + \hat{a}\hat{b} \rangle}{\langle \hat{a} + \hat{a} \rangle \langle \hat{b} + \hat{b} \rangle}, \quad (2.6)$$

рахуючи її в експерименті як співвідношення ймовірностей:

$$g_{a,b}^{(2)}(\tau) = \frac{p_{a,b}(t, t + \tau)}{p_a(t)p_b(t + \tau)}. \quad (2.7)$$

У випадку джерела біфотонів вираховується автокореляція моди \hat{a} за умови реєстрації фотона в іншій моді \hat{b} [25]:

$$\alpha = g_{a,a|b}^{(2)} = \frac{P_{a,a|b}}{P_{a|b}^2} = \frac{P_{a,a,b}}{P_{a|b}^2}. \quad (2.8)$$

Тоді за значень $\alpha < 1$ ми маємо неklasичне, антикорельоване світло [26]. Проте це світло є неklasичним лише за умови детектування фотона в моді \hat{b} , на що вказують умовні ймовірності в (2.8). Якщо розглядати кожне поле окремо, то вони обидва в умовах нашого експерименту матимуть теплову статистику, тобто $g^{(2)}(\tau=0) = 2$.

Альтернативним показником для джерела біфотонів є порушення нерівності Коші-Буняковського-Шварца (англ. *Cauchy-Schwarz inequality*), що виконується для класичного світла [27]:

$$\mathcal{R} = \frac{\left(g_{a,b}^{(2)}\right)^2}{g_{a,a}^{(2)}g_{b,b}^{(2)}} \leq 1. \quad (2.9)$$

Оскільки автокореляції $g_{a,a}^{(2)} = g_{b,b}^{(2)} = 2$, то нерівність Коші-Буняковського-Шварца порушується при $g_{a,b}^{(2)} > 2$. Для ідеального джерела біфотонів $\mathcal{R} \rightarrow \infty$, але в реальних експериментах значення \mathcal{R} обмежують сторонні шуми, а також скінченна тривалість вимірювання.

2.4 Яскравість імовірнісних джерел

Як було сказано на початку розділу, перевагою ймовірнісних джерел над детерміністичними є здатність випромінювати фотони (або, точніше, пари фотонів) неперервно та у великих кількостях за одиницю часу. Тому кількість випромінених за одиницю часу біфотонів, або генерована яскравість (англ. *generated brightness*, **GB**), яка вимірюється у парах фотонів на секунду, є важливою кількісною характеристикою джерела.

Проте в реальних експериментах із урахуванням менш ніж стовідсоткової ефективності оптичного обладнання, детекторів та робочого циклу експерименту (η_{opt} , η_{det} та η_{duty} відповідно), виміряна яскравість джерела (англ. *detected brightness*, **DB**) буде меншою: $\text{DB} = \eta_{\text{opt}} \cdot \eta_{\text{det}} \cdot \eta_{\text{duty}} \cdot \text{GB}$.

Для порівняння яскравостей різних за спектром джерел також використовується генерована спектральна яскравість (англ. *generated spectral brightness*, **GSB**), що вимірюється в парах фотонів на секунду на мегагерц ширини спектра (pairs/(s \times MHz)). Оскільки в експериментах, описаних у дисертації, яскравість зростає пропорційно до потужності накачки, важливим кількісним показником

також є генерована спектральна яскравість на одиницю потужності накачки (англ. *generated spectral brightness per pump power*, **GSBP**) у парах на секунду на мегагерц на нановатт ($\text{pairs}/(\text{s} \times \text{MHz} \times \text{nW})$).

2.5 Спектральні характеристики фотонів

Різні застосування мають різні вимоги як до абсолютного значення частоти, так і до спектральної ширини випроміненого джерелом квантового світла.

З точки зору спектральної ширини, часто вимагається висока спектральна чистота, тобто висока монохроматичність світла. Для лоренцових або гаусових спектрів за міру спектральної чистоти можна обрати напівширину (англ. *full width at half maximum*, **FWHM**). Проте, оскільки спектральна ширина пов'язана з тривалістю імпульса, у випадку часового, а не частотного мультиплексування може виникнути потреба пожертвувати спектральною чистотою на користь коротшої тривалості імпульсів.

Щодо абсолютного значення частоти, то воно повинно відповідати характерним частотам інших елементів системи, таких як повторювачі, логічні вентиля або детектори. Наприклад, для передачі квантової інформації на великі відстані за допомогою оптичних волокон довжина хвилі має складати 1310 nm чи 1550 nm, що відповідає телекомунікаційним діапазонам O-band та C-band, за яких маємо мінімальні втрати відповідно 0.3 dB/km та 0.15 dB/km [28]. Для супутникових каналів передачі існує більший вибір діапазонів частот [29] та менші втрати на цих частотах [30]. Таким чином, є потреба або мати джерела, які випромінюють фотони на таких частотах, або використовувати перетворювачі частот [31].

2.6 Огляд детерміністичних джерел

До детерміністичних джерел можна віднести, з одного боку, одноатомні джерела, історично перше з котрих базувалося на вимушеному раманівському адіабатичному переході (англ. *stimulated Raman adiabatic passage*, **STIRAP**) і було створено в Інституті квантової оптики Макса Планка (нім. *Max-Planck Institut für Quantenoptik*) у 2002 році [32], а також джерела з одиночним йоном [33], молекулою [34], чи атомоподібною структурою в напівпровіднику [35—40]. У таких джерелах атом найчастіше знаходиться в резонаторі для більшої ефективності отримання фотона. Такі джерела є найбільш детермінованими та мають низьку автокореляцію $g^{(2)}(0) \sim 0.01$ [20]. Напівпровідникові джерела також є перспективними для створення інтегрованих схем [41]. Однак фотони від різних джерел є розрізненими через структурні неоднорідності в напівпровідниках [22], що обмежує їхнє використання, наприклад, у квантових повторювачах [42]. Для вирішення цієї проблеми було запропоновано уподібнювати спектри різних джерел за допо-

могою електричних полів [43, 44] або генерувати всі фотони одним джерелом і розподіляти їх по лініях затримки, аби приймач отримав їх одночасно [45—47].

З іншого боку, були створені багатоатомні джерела [48—51] на основі протоколу **DLCZ** [52], названого на честь чотирьох авторів: Luming Duan (кит. 段路明, PY /duàn lù míng/), Mikhail Lukin (рос. Михаил Дмитриевич Лукин), Juan Ignacio Cirac Sasturain, Peter Zoller. Ці джерела використовують ансамбль із багатьох лямбда-атомів, що мають два нижніх рівні $|1\rangle$ та $|2\rangle$, перехід між якими захищений, та один верхній рівень $|3\rangle$. Протокол **DLCZ** складається з двох етапів. На першому — етапі *запису* (термінологія зумовлена тим, що протокол початково призначався для створення квантової пам'яті) — атоми, що знаходяться в стані $|1\rangle$, опромінюються слабким світлом, близьким за частотою до переходу $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$. У процесі раманівського (комбінаційного) розсіювання на переході $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ випромінюється фотон, який ми детектуємо. Під час випромінювання цього фотона один із атомів перейшов зі стану $|1\rangle$ через стан $|3\rangle$ у стан $|2\rangle$, але ми на квантовому рівні не знаємо, який саме атом зробив цей перехід і розсіяв фотон. Тому весь ансамбль знаходиться у квантово заплутаному стані, що називається *делокалізованою спіновою хвилею*:

$$\psi_{\text{spin wave}} = \sum_{a \in \text{atoms}} |2\rangle_a \otimes |1\rangle_{\text{others}} \exp \left[i \left(\vec{k}_{\text{write}} - \vec{k}_{\text{photon-1}} \right) \cdot \vec{r}_a \right]. \quad (2.10)$$

Як бачимо, ця спінова хвиля має фазовий множник, що визначається хвильовими векторами поля запису \vec{k}_{write} та задетектованого фотона $\vec{k}_{\text{photon-1}}$. Тому на другому етапі, етапі *зчитування*, коли ми опромінюємо ансамбль уже на переході $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ світлом із хвильовим вектором \vec{k}_{read} , завдяки інтерференції між членами квантової суперпозиції другий фотон випромінюватиметься в строго визначеному напрямку:

$$\vec{k}_{\text{photon-2}} = \vec{k}_{\text{read}} + \vec{k}_{\text{write}} - \vec{k}_{\text{photon-1}}. \quad (2.11)$$

Перевагою **DLCZ** є здатність генерувати вузькосмугові фотони з **FWHM** до сотень кілогерц, причому часову та спектральну форму фотонів можна змінювати в межах двох порядків величини [53]. Недоліком є те, що чистота спінової хвилі як квантового стану обмежується через декогеренцію, спричинену тепловим рухом атомів. Через це час між записом та зчитуванням не має перевищувати характерний час декогеренції. Проте останнім часом на лазерно охолоджених атомах рубідію-87 цей час вдалося збільшити до 1 ms [54].

2.7 Огляд імовірнісних джерел

Як було зазначено в попередньому розділі, імовірнісні джерела квантового світла випромінюють не одиночні фотони, а біфотони — пари квантово сплутаних фотонів. Історично перші джерела біфотонів працювали за чотирирівневою каскадною

схемою — такі джерела в своїх дослідженнях використали двоє з трьох лауреатів Нобелівської премії 2022 року, Джон Клоузер (англ. *John F. Clauser*) [55, 56] та Ален Аспе (фр. *Alain Aspect*) [57—60]. Такі каскадні джерела мали низьку яскравість і потребували складної оптики, яка б охоплювала великий тілесний кут, адже сплутані фотони могли випромінюватись у будь-яких напрямках.

Третій нобелівський лауреат, Антон Цайлінгер (нім. *Anton Zeilinger*), робив свої дослідження [61—67] у 1990-ті роки, коли вже були створені більш ефективні джерела, основані на спонтанному параметричному розсіянні (англ. *spontaneous parametric down-conversion, SPDC*) [68—70], які є актуальними і в наш час [71—77]. **SPDC** є квадратичним ($\chi^{(2)}$) нелінійним ефектом, оберненим до ефектів генерації сумарної та другої гармонік, тому він спостерігається лише в певних монокристалах, які не мають центральної симетрії та мають одновісне (коли показники заломлення за двома осями співпадають між собою, але відрізняються від показника третьої осі) чи тривісне (коли всі три показники заломлення є різними) подвійне заломлення [78]. Найпопулярнішим таким кристалом, що використовується у **SPDC**, є борат барію $\text{Ba}(\text{BO}_2)_2$ [72, 73, 77, 78], але також використовуються дигідрофосфат амонію $\text{NH}_4\text{H}_2\text{PO}_4$ [70], борат бісмуту $\text{Bi}(\text{BO}_2)_3$ [74], ніобат калію KNbO_3 [76] та інші сполуки.

На наш час **SPDC** є найпопулярнішим методом генерації біфотонів: на відміну від попередніх каскадних джерел, фотони від **SPDC**-джерела випромінюються в напрямку, однозначно визначеному тензором $\chi^{(2)}$ кристала та умовами синхронізму

$$\omega_{\text{pump}} = \omega_{\text{photon-1}} + \omega_{\text{photon-2}}, \quad \vec{k}_{\text{pump}} = \vec{k}_{\text{photon-1}} + \vec{k}_{\text{photon-2}}. \quad (2.12)$$

Недоліками **SPDC** в найпростішому його варіанті є невідповідність частот (порядка 800 nm) і просторового профіля випромінених біфотонів для ефективної передачі в одномодових оптичних волокнах, а також паразитні кореляції в частотному спектрі, через що фотони з різних пар є розрізненними [22]. На наш час обидві проблеми вдалося вирішити: невідповідність частоти для передачі в оптичних волокнах — за допомогою англ. *periodic poling*, тобто періодичної зміни знака $\chi^{(2)}$ [79], а паразитні кореляції спектрів — за допомогою підбору групових швидкостей (англ. *group velocity matching*), що дозволяє контролювати форму спектра, у тому числі звязати його до однієї спектральної моди [80].

Останнім типом джерел біфотонів є джерела на основі чотирихвильової взаємодії, також відомої як чотирихвильове змішування (англ. *four-wave mixing, FWM*). Так само як і **SPDC**, **FWM** є нелінійним явищем, що виникає через те, що діелектрики під впливом електричного поля поляризуються, і залежність поляризації від поля за великих його амплітуд відхиляється від лінійного закону $\vec{P} = \chi \cdot \vec{E}$. Але **FWM**, на відміну від квадратичного **SPDC**, є кубічним ($\chi^{(3)}$) ефектом, і тому його можна спостерігати не тільки в певних особливих кристалах, а й в ізотропних речовинах, таких як атмосферне повітря [81—83] та інші гази [84,

85], вода [86], колоїдні розчини (чорний чай [87], колоїдне золото [88]), а також полум'я [89—91]. У контексті джерел біфотонів перші експерименти було проведено на оптичних волокнах із кварцового скла [92—95]: хоча $\chi^{(3)}$ -нелінійність у кварцовому склі дуже мала, це компенсується великою довжиною взаємодії у волокні [20]. У подальшому було створено FWM-джерела біфотонів на атомах рубідію [96—100], в яких завдяки електромагнітно індукованій прозорості (ЕІТ), яку розглянемо в розділі 3.1, кубічна нелінійність $\chi^{(3)}$ посилювалася, а поглинання $\text{Im}[\chi]$ — навпаки, послаблювалося [101, 102] завдяки інтерференції між складовими розділення Ауслера-Таунса [103].

Отже, перевагою FWM-джерел є можливість використовувати будь-які речовини, через що відпадає потреба в таких заходах, як *periodic poling*. А недоліком, через який FWM-джерела, власне, і не є такими популярними, як SPDC-джерела — те, що характерні значення кубічних нелінійностей є набагато меншими за значення квадратичних. Їх було оцінено у [104, сес. 1.1] через кулонівське поле ядра атома водню на радіусі Бора $a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/me^2$, що складає $E_{\text{ат}} = 5.14 \times 10^{11}$ В/м. За цією оцінкою маємо для квадратичного коефіцієнта $\chi^{(2)} \sim \chi/E_{\text{ат}}^2$, а для кубічного $\chi^{(3)} \sim \chi/E_{\text{ат}}^3$. Світлові поля мають характерну амплітуду $E \ll E_{\text{ат}}$ (інакше вони б іонізували атоми), тому вклади відповідних нелінійностей у поляризацію $P^{(3)} \ll P^{(2)}$. Щоб скомпенсувати цю різницю, FWM-джерела мають бути набагато більш оптично товстими за SPDC-джерела.

Розділ 3

Чисельна модель

Важливим результатом дисертаційної роботи, до якого автор зробив найбільший внесок, є розроблена чисельна модель. Ця модель дозволяє проводити дослідження когерентної взаємодії атомів складної структури з лазерним світлом довільної поляризації. Вона була створена для чисельного супроводу експериментів, проведених на лазерно охолоджених атомах рубідію-87, завантажених у порожнисте оптичне волокно. Опис цих експериментів подано в розділах 4 та 5. У цьому розділі детально опишемо саму чисельну модель.

3.1 Огляд чисельних досліджень із атомами складної структури

Розглянута в цьому розділі чисельна модель є досить універсальною і може знайти застосування в широкому спектрі випадків, не обмежуючись лише описаними в розділах 4 та 5 експериментами. Тому присвяtimo їй окремий огляд літератури, в якому розглянемо деякі попередні дослідження, що стосуються атомів складної структури рівнів і враховували її в чисельних дослідженнях.

3.1.1 Електромагнітно індукована прозорість

Досить популярним напрямком досліджень, у котрих використовуються складні за структурою рівнів атоми, є експерименти з електромагнітно індукованої прозорості (англ. *electromagnetically induced transparency*, **EIT**). Це явище було теоретично передбачено у [103] і вперше експериментально реалізовано у [105].

EIT в своєму найпростішому вигляді спостерігається на системах із трьох рівнів, у котрих два з трьох переходів є дипольно дозволеними, а один — дипольно забороненим. Існує три схеми рівнів, які дозволяють спостерігати **EIT**: лямбда-схема, V-схема та драбинна (англ. *ladder*) схема. Ці три схеми зображено на рисун-

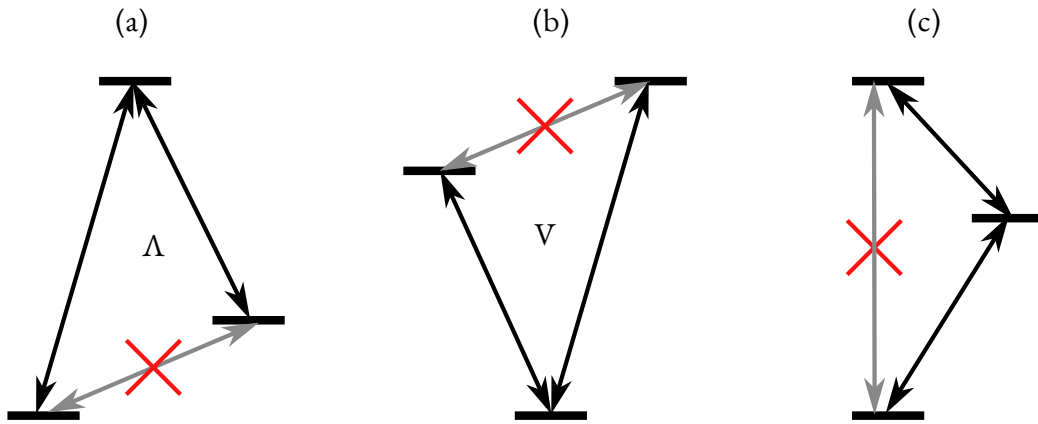


Рисунок 3.1: Три типи схем, що дозволяють спостерігати ЕІТ: лямбда-схема **(a)**, V-схема **(b)** та драбинна схема **(c)**.

ку 3.1. Більшість досліджень ЕІТ виконуються на лямбда-системах, оскільки в двох інших схем ЕІТ обмежено відсутністю метастабільного темного стану [106].

Схему експерименту ЕІТ на лямбда-схемі зображено на рисунку 3.2. Початково атоми знаходяться в стані $|1\rangle$. Перехід між рівнями $|2\rangle$ та $|3\rangle$ опромінюється сильним, так званим *контрольним*, полем із відстройкою Δ_c та частотою Рабі Ω_c , а перехід між $|1\rangle$ і $|3\rangle$ — слабким *пробним* полем із частотою Рабі Ω_p та відстройкою Δ_p . У цій системі, навіть якщо система має велику оптичну товщину (*англ. optical depth, OD*) за відсутності контрольного поля, за його присутності та при двофотонному резонансі $\Delta_p = \Delta_c \equiv \Delta$ вона для пробного поля стане прозорою.

Щоб пояснити цей ефект, запишемо гамільтоніан системи у наближенні хвиль, що обертаються (*англ. rotating wave approximation, RWA*):

$$\frac{H}{\hbar} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\Delta_p & \cdot & \Omega_p \\ \cdot & 2\Delta_c & \Omega_c \\ \Omega_p & \Omega_c & \cdot \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Розглядатимемо частоти Рабі як дійсні та додатні.

За двофотонного резонансу можна аналітично знайти його власні стани («одягнуті стани») та їхні енергії:

$$\begin{aligned} |0\rangle &\propto -\Omega_c |1\rangle + \Omega_p |2\rangle, \\ |\pm\rangle &\propto \Omega_p^2 |1\rangle + \Omega_c^2 |2\rangle + \left(\pm\Delta + \sqrt{\Delta^2 + \Omega_p^2 + \Omega_c^2}\right), \\ H |0\rangle &= 0, \\ H |\pm\rangle &= \Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + \Omega_p^2 + \Omega_c^2}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Ці власні стани називаються «одягнутими станами» (*англ. dressed states*), на відміну від «голих» (*англ. bare*) власних станів самого атома. З одягнутих

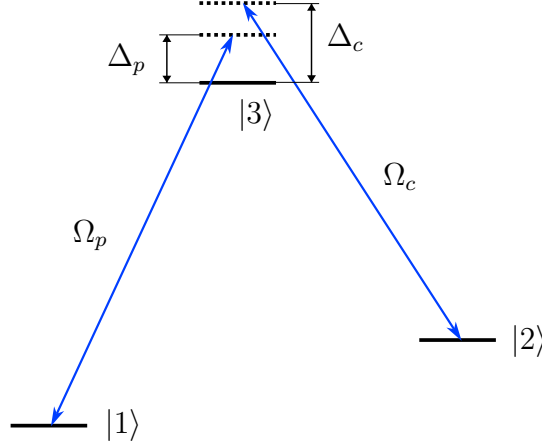


Рисунок 3.2: Схема експерименту **EIT** на лямбда-схемі.

станів особливий інтерес викликає стан $|0\rangle$, який відомий як «темний стан» (англ. *dark state*) або стан когерентного полонення населеностей (англ. *coherent population trapping*, **CPT**), оскільки його власне значення дорівнює нулю. Це означає, що атоми в цьому стані не взаємодіють із полями. Якщо пробне поле є слабким у порівнянні з контрольним ($\Omega_p \ll \Omega_c$), то одягнутий стан $|0\rangle$ збігається з голим станом $|1\rangle$, у якому знаходяться атоми. Таким чином, для цього слабого пробного поля середовище стає прозорим.

Більш детальний аналіз явища **EIT** наведено в оглядових статтях [106, 107]. Тут же розглянемо, як наявність сильного контрольного поля, що викликає **EIT**, впливає на спектр поглинання та дисперсії переходу $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$, на котрому діє пробне поле. Для цього з рівняння часової еволюції для матриці густини з гамільтоніаном 3.1 можна отримати [106] вираз для лінійної діелектричної сприйнятливості в залежності від однофотонної ($\Delta = -\Delta_p$) та двофотонної ($\delta = \Delta_c - \Delta_p$) відстройки:

$$\chi(\Delta, \delta) \propto \frac{(4\delta(\Omega_c^2 - 4\delta\Delta) - 4\Delta\gamma^2) + i(8\delta^2\Gamma + 2\gamma(\Omega_c^2 + \Gamma\gamma))}{|\Omega_c^2 + (\Gamma + 2i\Delta)(\gamma + 2i\delta)|^2}, \quad (3.3)$$

де $1/\Gamma$ — час життя рівня $|3\rangle$, а γ — швидкість декогеренції між рівнями $|1\rangle$ та $|2\rangle$.

На рисунку 3.3 зображено залежність дійсної (що відповідає за заломлення) та уявної частини χ (що відповідає за поглинання) в залежності від відстройки пробного поля Δ_p за нульової відстройки контрольного поля. Як бачимо, спектральна лінія поглинання розділюється на дві, а між ними, за нульової відстройки (то-

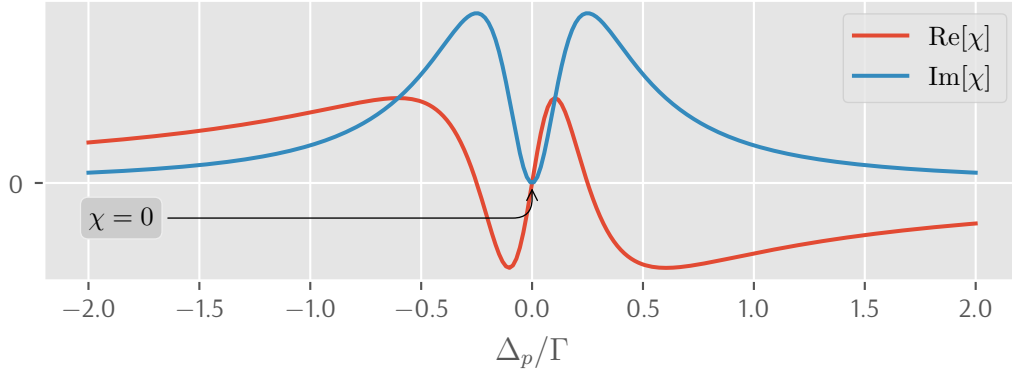


Рисунок 3.3: Дійсна та уявна частина χ в залежності від відстройки пробного поля Δ_p за значень $\Omega_c = 0.5\Gamma$, $\Delta_c = 0$, $\gamma = 0$.

чніше, за двофотонного резонансу $\delta = 0$), коефіцієнт поглинання, пропорційний до $\text{Im}[\chi]$, в ідеальному випадку $\gamma = 0$ дорівнює нулю.

Дійсна частина χ відповідає за заломлення пробного поля (в гаусовій системі одиниць показник заломлення визначається виразом $n = \sqrt{1 + 4\pi \text{Re}[\chi]}$, де нехтуємо магнітною проникністю середовища). Видно, що між розділеними половинками спектральної лінії, на яких спостерігається аномальна дисперсія ($d\chi/d\omega_p < 0$), з'являється область нормальної дисперсії ($d\chi/d\omega_p > 0$).

Групова швидкість світла залежить від швидкості зміни показника заломлення зі зміною відстройки:

$$c_{\text{group}} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{c}{n + \frac{\partial n}{\partial \omega_p}}. \quad (3.4)$$

Оскільки у резонансному випадку $\Delta_p = \Delta_c = 0$ ми маємо $\text{Re}[\chi] = 0$, то

$$c_{\text{group}} = \frac{c}{1 + 2\pi \frac{\partial \text{Re}[\chi]}{\partial \omega_p}}. \quad (3.5)$$

Похідна діелектричної сприйнятливості за таких умов

$$\frac{\partial \text{Re}[\chi]}{\partial \omega_p} \propto 4 \frac{\Omega_c^2 + \gamma^2}{(\Omega_c^2 + \Gamma\gamma)^2}. \quad (3.6)$$

В ідеальних умовах, за відсутності декогеренції $\gamma = 0$, ця похідна спадає пропорційно до Ω_c^{-2} . Тому за достатньо слабкого контрольного поля швидкість пробного поля можна зробити набагато меншою за швидкість світла у вакуумі. Цей так званий «ефект повільного світла» (англ. *slow light effect*) було вперше експериментально досліджено в 1995 році [108], а в 1999 році на охолоджених парах натрію [109] та рубідію [110] світло було сповільнено до швидкостей відповідно 17 m/s та 90 m/s.

За допомогою ЕІТ можна не тільки значно сповільнити світло, а й зовсім його зупинити. Хоча сповільнення світла за допомогою ЕІТ в стаціонарних умовах обмежене через малу спектральну ширину пропускання [111], у [112] було показано, що це обмеження можна подолати, змінюючи інтенсивність контрольного поля в часі. Якщо її зменшити адиабатично до нуля, то світло буде захоплене речовиною у вигляді когерентності між двома нижніми рівнями лямбда-схеми $|1\rangle$ та $|2\rangle$. За [112], сповільнене світло в ЕІТ-середовищі, в тому числі зупинене світло, можна розглядати як поле так званих «темних поляритонів» (англ. *dark polaritons*), що є лінійною комбінацією електричного поля \hat{E} та поля когерентності між нижніми рівнями $\hat{\sigma}_{12}$:

$$\hat{\Psi}(z, t) = \cos(\theta(t))\hat{E}(z, t) - \sin(\theta(t))\sqrt{N}\hat{\sigma}_{12}(z, t), \quad (3.7)$$

де кут $\theta(t) = \arctan\left(g\sqrt{N}/\Omega_c(t)^2\right)$, а g — константа взаємодії між світлом та атомами. Поле $\hat{\Psi}$ підпорядковується рівнянню руху

$$\left(\frac{\partial}{c\partial t} + \cos^2(\theta(t))\frac{\partial}{\partial z}\right)\hat{\Psi}(z, t) = 0. \quad (3.8)$$

Це рівняння можна розглядати як хвильове рівняння Гельмгольца зі швидкістю поширення поля $\cos^2(\theta(t)) \cdot c$. Оскільки власними станами цього поля в ансамблі з N атомів є темні стани [112, 113], то змінюючи адиабатично групову швидкість аналогічно до STIRAP, можна «зупинити» світловий імпульс, зберігши його квантовий стан у вигляді делокалізованої спінової хвилі. Після цього його можна адиабатично «розігнати» назад до швидкості світла. Оскільки зупинене світло зберігає свій квантовий стан, цей ефект є перспективним для створення квантової пам'яті.

Хоч у [112] для зупинки світла і вимагається адиабатичність, але в [114—116] було показано, що ця вимога не є строгою: хоч за миттєвого вимкнення контрольного поля і маємо максимальні втрати інформації, але вони визначаються співвідношенням початкової групової швидкості до швидкості світла, котре можна зробити достатньо малим за допомогою ефекту повільного світла [114].

Перший експеримент із зупинки світла було виконано на холодних атомах натрію [115]. Майже одночасно було опубліковано експерименти на гарячих парах рубідію [117] та кристалах Y_2SiO_5 із домішкою празеодиму [118]. На такому самому кристалі в 2013 році група з Інституту прикладної фізики Технічного університету Дармштадта (нім. *Institut für Angewandte Physik der Technischen Universität Darmstadt*) під керівництвом Томаса Халфмана (*Thomas Halfmann*) досягла рекордної тривалості зберігання квантового стану в одну хвилину [119]. Також важливо відзначити їхній експеримент із зупинки світла, проведений тією ж групою на холодних атомах рубідію-87, завантажених у порожнисте оптичне волокно

НСРСВGF, тобто в тих самих умовах, що і експерименти в розділах 4 та 5 цієї дисертації [120].

Як середовище для **EIT** та похідних від нього ефектів сповільнення та зупинки світла часто використовують атоми лужних металів: літій [121], натрій [115, 122—124], калій [125, 126], цезій [127], але найпопулярнішим є рубідій [117, 120, 128—139]. Лямбда-схему в лужних металах зазвичай створюють на рівнях надтонкої структури D-лінії: нижніми рівнями найчастіше є два надтонких підрівні $^2S_{1/2}$, а верхнім — один із надтонких підрівнів $^2P_{1/2}$ чи $^2P_{3/2}$.

Рівні надтонкої структури лужних металів є виродженими за магнітним квантовим числом, і різні переходи між магнітними підрівнями взаємодіють із різними поляризаційними компонентами поля (більш детально це виродження розглянуто в розділі 3.2.3). Тому це виродження необхідно враховувати під час порівняння експериментальних результатів із теорією. Іноді магнітні підрівні розділюють за допомогою магнітного поля [126, 131, 140] або обирають схему на D₂-лінії рубідію-87 із верхнім рівнем $5^2P_{3/2}F=0$ та полями протилежних кругових поляризацій, так що в процесі беруть участь тільки рівні з $M = \pm 1$ [129, 136]. Однак у більшості експериментів магнітні підрівні не розділюють, так що реальні схеми рівнів є досить складними [121, 132]. Під час теоретичних розрахунків із такими схемами доводиться працювати з громіздкими системами рівнянь [130]. Проте в класичному **EIT** не потрібно обчислювати часову еволюцію квантового стану атомів, адже досить визначити стаціонарний стан. Однак, під час дослідження ефектів сповільнення та зупинки світла часову еволюцію слід враховувати, і такі розрахунки виконуться чисельно.

Наприклад, група з Національного університету Цінхуа (кит. *трад.* 國立清華大學, **PY** /guó lì jīng huá dà xué/), розташованого на Тайвані в місті Сінчжу, використовувала поля протилежних кругових поляризацій під час своїх експериментів із рубідієм-87 [133, 134] та цезієм-133 [127, 141], аналогічно [129, 136]. Це дозволило розділити повну схему рівнів на кілька незалежних лямбда-схем [142], що спростило чисельні розрахунки. На відміну від тайванської групи, група Тома-са Халфмана з Технічного університету Дармштадта [120, 128], використовуючи **НСРСВGF**, не мала можливості забезпечити сталу поляризацію світла, тому виродження за магнітним квантовим числом не враховувалося взагалі. Це може бути причиною того, що обчислена за «простою» теорією декогеренція між двома нижніми рівнями лямбда-схеми, зображена на рисунку 5 (b) у статті [128], змінюється в досить широких межах.

3.1.2 Натрієві опорні зірки

В астрономії під час спостереження далеких зірок і галактик близькі з точки зору земного спостерігача об'єкти можуть спотворюватися або зливатися на зображенні телескопа через атмосферну турбулентність [143]. Для підвищення роздільної

здатності використовується *адаптивна оптика*: дзеркало телескопа деформують відповідно до спотворень хвильового фронту. Цей підхід, вперше запропонований у 1953 році [144], отримав практичне застосування лише у 1970-х роках завдяки розробкам для Збройних сил США з метою спостереження за супутниками [145].

В астрономії, де спостереження ведуться за об'єктами набагато менш яскравими за штучні супутники Землі, перша система адаптивної оптики була успішно впроваджена наприкінці 1980-х [146, 147], дозволивши досягти дифракційної межі роздільної здатності та усунути атмосферні спотворення. Сучасні телескопи з адаптивною оптикою мають роздільну здатність в інфрачервоному та видимому діапазонах, яка перевищує показники космічного телескопа Hubble [148].

Принцип роботи системи адаптивної оптики зображено на рисунку 3.4. Спотворення хвильового фронту вимірюються в реальному часі за допомогою сенсора хвильового фронту і виправляються за допомогою гнучкого дзеркала, яке деформується відповідно до виміряних спотворень [145].

Але зазвичай світло далеких зірок і галактик є надто слабким, аби надійно виміряти спотворення хвильового фронту. Адаптивна оптика може бути використана ефективно лише в тому випадку, якщо поруч із досліджуваним об'єктом на небі є яскраве джерело світла, котре називають *опорною зіркою* (англ. *guide star*). Перші дослідження з адаптивною оптикою [146, 147] проводилися саме на яскравих зорях, таких як Капелла, альфа Лебеда, Бетельгейзе, гамма Андромеди та інші. Зорі достатньої для адаптивної оптики яскравості зустрічаються на небі досить рідко, і це є головним чинником, що обмежує покриття неба [145].

У 1982 році [149] Джуліус Фейнлейб (англ. *Julius Feinleib*) на секретне замовлення Пентагону запропонував запалювати на небі штучні зорі за допомогою лазерного світла. Подібну пропозицію також опублікували французькі астрономи Робі Фуа (фр. *Robbie Foy*) та Антуан Лабейрі (фр. *Antoine Labeyrie*) [150]. Опорні зорі створювалися на висотах від 15 km за допомогою релієвського розсіювання. Промені від таких опорних зірок не є строго паралельними, що відрізняло їх від світла справжніх космічних об'єктів, тому хвильові фронти в атмосфері спотворювалися трохи по-різному. Крім того, за допомогою релієвських опорних зірок було складно визначити турбулентність у більш високих шарах атмосфери. У 1991 році було розсекречено і в 1994 опубліковано [151] результати американських військових досліджень 1982–1984 років, під час яких було вперше створено натрієву опорну зірку.

В атмосфері Землі, на висоті близько 100 km, розташований 20-кілометровий [152] шар, багатий на принесений мікрометеорами [153] атомарний натрій. Концентрація атомів натрію на цих висотах досягає кількох тисяч на кубічний сантиметр і залежить від широти та пори року; нижче цього шару атоми натрію об'єднуються з іншими елементами в хімічні сполуки, а вище — іонізуються [154].

Натрієві опорні зорі використовують лазерне світло з довжиною хвилі 589 nm, що відповідає D₂-лінії натрію, для підсвічування натрієвого шару в атмо-

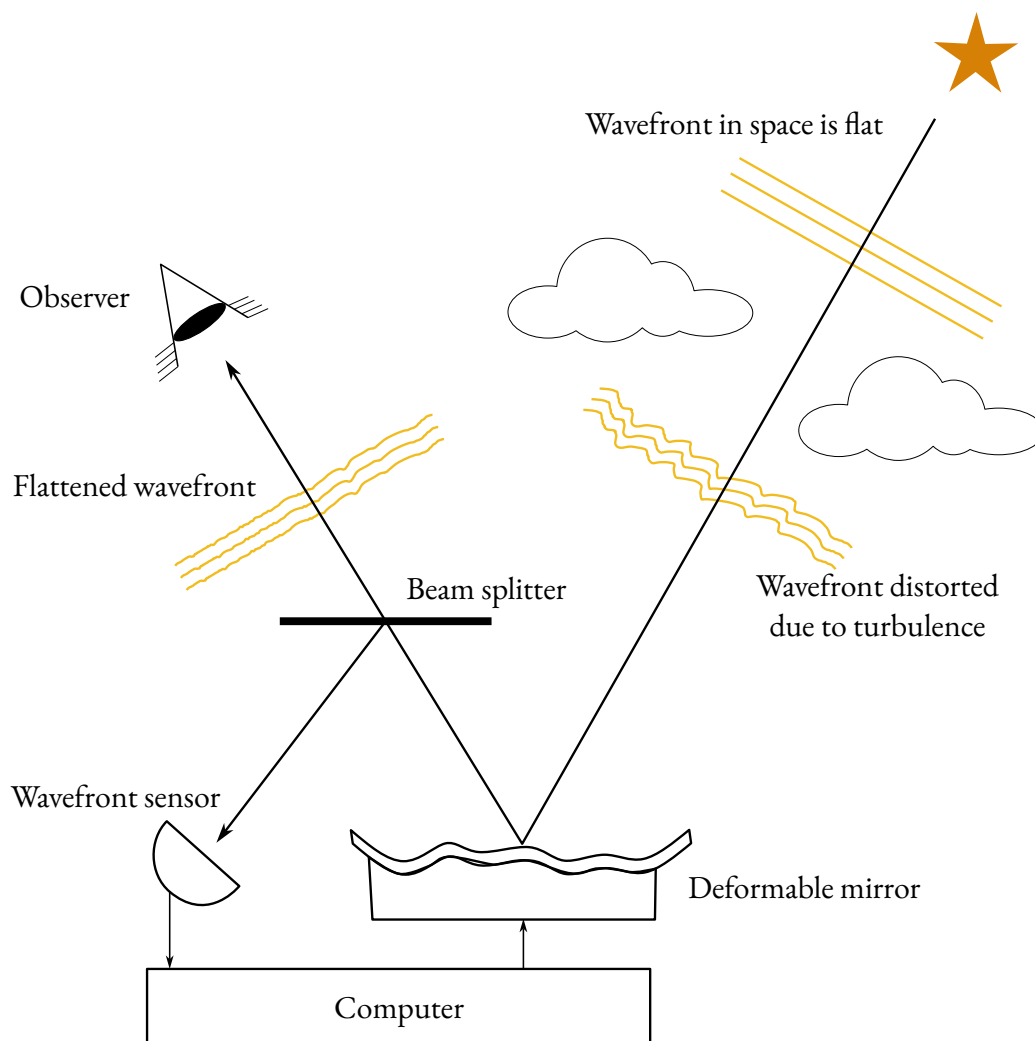


Рисунок 3.4: Принцип роботи адаптивної оптики. Спотворення хвильового фронту вимірюються сенсором хвильового фронту і виправляються за допомогою гнучкого дзеркала, що деформується відповідно до виміряних спотворень



Рисунок 3.5: Система з чотирьох лазерів, що запалюють натрієву опорну зорю на телескопі Very Large Telescope Unit Telescope 4 (Уерун) в Паранальській обсерваторії на горі Серро-Параналь (Чилі), що належить Європейській південній обсерваторії. Зображення взяте з офіційного сайту обсерваторії <https://elt.eso.org/>. Credit: ESO/A Ghizzi Panizza (<http://www.albertoghizzipanizza.com/>)

сфері. Атоми натрію, збуджені цим світлом, перевипромінюють його, створюючи штучну зірку жовтого кольору.

В астрономії натрієву опорну зірку вперше запалили на телескопі Multiple Mirror Telescope, розташованому в Обсерваторії імені Віппа в Амандо, Арізона, США, для спостереження за Великим зоряним скупченням Геркулеса М13 (NGC 6205, GCL 45) [155]. Найкращих результатів використання натрієвих зірок дозволяє досягати на великих телескопах із високою дифракційною роздільною здатністю, таких як Gemini North (Гаваї, США), Gemini South (Чилі), Subaru (Гаваї, США), а також Very Large Telescope (Чилі), зображений на рисунку 3.5. Остання система, створена спільно компаніями TOPICA (Німеччина), MPB Communications (Канада) та TNO (Нідерланди), є найпотужнішою в світі: кожен із чотирьох її лазерів генерує промінь діаметром у 30 см і потужністю 20 W, витрачаючи менш ніж 700 W електроенергії [156].

Проте за допомогою таких штучних зірок неможливо визначити нахил хвильового фронту як цілого (два лінійні члени в розкладі в ряд Фур'є за многочленами Церніке), оскільки цей нахил є перпендикулярним до оптичного шляху, а

оптичні шляхи для променя, що запалює зірку, і для світла від самої зірки співпадають, бо обидва промені проходять через одні і ті самі неоднорідності. І це при тому, що саме нахил хвильового фронту як цілого відповідає за 90 % фазових флуктуацій хвильового фронту [157].

Для визначення нахилу фронту було запропоновано декілька способів. Один із них — запалювати поліхроматичні опорні зорі, які би світилися не на одній, а хоча б на двох різних довжинах хвиль. Тоді, знаючи різницю показників заломлення, можна відтворити форму хвильового фронту включно з його нахилом [158]. Ця технологія є відносно новою: хоча експерименти з поліхроматичними зорями і проводяться [159—161], але під час реальних астрономічних досліджень нахил усе ще визначають за «справжніми» опорними зорями.

На відміну від оглянутих у попередніх розділах досліджень, для натрієвих опорних зірок порівняно велика частка досліджень виконується чисельно. У таких дослідженнях розв'язуються оптичні рівняння Блоха, що є рівняннями часової еволюції для матриці густини, і визначається яскравість зірки залежно від потужності, спектру та поляризації поля. Такі чисельні дослідження проводилися як для монохроматичних [162—167], так і для поліхроматичних зірок [168—171]. Одним із чинників, що впливають на яскравість натрієвої зірки, є магнітне поле Землі [163], тому в більшості досліджень береться до уваги виродження за магнітним квантовим числом. І хоча такі чисельні дослідження, так само як і описані в цій дисертації, працюють із десятками рівнів, але прямо їх порівнювати не можна. Адже з одного боку, в дослідженнях натрієвих зірок враховується максвелівський розподіл швидкостей атомів, у той час як в експериментах із розділів 4 та 5 атоми є холодними. З іншого — в дослідженнях натрієвих зірок амплітуда поля не є невідомою величиною (нема завдання визначити її просторовий розподіл), тому рівняння Блоха є лінійними, що дозволяє використовувати набагато ширший арсенал чисельних методів. Наприклад, одна і та сама група в одній роботі [163] використала стабілізований метод біспряжених градієнтів (BiCGStab) [172], в другій [164] знайшла аналітичний розв'язок лінійної системи у вигляді матричної експоненти, а в третій [165] — використала алгоритм CVODE [173] із програмного пакета SUNDIALS. У роботах [166] та [167] конкретний чисельний метод узагалі не вказано — автор припускає, що вони використали стандартну функцію NDSolve із програмного пакета Wolfram Mathematica.

3.2 Вимоги до чисельної моделі

Описану в цьому розділі чисельну модель було створено для чисельного супроводу експериментів на лазерно охолоджених атомах рубідію-87, завантажених у порожнисте оптичне волокно з фотонним кристалом (англ. *hollow-core photonic crystal bandgap fiber*, НСРСВГФ). Структуру рівнів атомів, особливості волокна

та процес завантаження буде описано на початку розділу 4. Зараз сформулюємо вимоги до чисельної моделі.

3.2.1 Врахування поляризації світла

Головним недоліком використання порожнистих волокон у порівнянні з, наприклад, магнітно-оптичними пастками (англ. *magneto-optical traps*, MOT) є те, що всі поля, що беруть участь в експерименті — і сильні контрольні, і слабкі пробні — поширюються вздовж однієї осі. Виникає проблема їх відокремлення, що можна зробити або за частотою, або за поляризацією.

Розділення за частотою експериментально реалізувати складно, бо ми маємо справу з надтонкою структурою рубідію-87, і, як видно з рисунка 4.3, частоти полів є дуже близькими одна до одної.

Розділення за поляризацію, навпаки, експериментально реалізується просто додаванням поляризуючого світлоділителя (англ. *polarizing beam splitter*, PBS). Проте за такого розділення значно ускладнюються теоретичні обчислення, оскільки потрібно врахувати, по-перше, виродження за магнітним квантовим числом, а по-друге, подвійне заломлення у волокні. Оскільки врахування обох факторів є основною перевагою запропонованої в дисертації чисельної моделі, зупинимося на кожному з них більш детально. Перед цим опишемо математичне представлення поляризації, яке використовуватиметься в чисельній моделі, а також спосіб її зображення на графіках у цій дисертації.

3.2.2 Математичне представлення поляризації

Оскільки ми працюємо тільки з повністю поляризованим світлом, за основу візьмемо формалізм Джонса. Таким чином, поляризацію описуватимемо у вигляді векторів Джонса, що містять комплексні амплітуди x - та y -компонент електричного поля:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Чисельні розрахунки виконуються також у формалізмі Джонса, але замість лінійного базиса (x, y) використовується базис із протилежних кругових поляризацій (σ^-, σ^+) :

$$E_{\pm} = \pm E_x + iE_y. \quad (3.10)$$

На графіках у цій дисертації поляризації зображуються через характеристики поляризаційного еліпса: кут нахилу великої осі ϕ та ступінь еліптичності ε . Для їх

визначення спочатку обчислимо параметри Стокса:

$$\begin{aligned} I &= |E_x|^2 + |E_y|^2, \\ Q &= |E_x|^2 - |E_y|^2, \\ U &= 2 \operatorname{Re}[E_x E_y^*], \\ V &= -2 \operatorname{Im}[E_x E_y^*]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Із параметрів Стокса визначаємо амплітуду поля E і параметри ϕ та ε :

$$E = \sqrt{I}, \quad \phi = \frac{\arctan2(U, Q)}{2}, \quad \varepsilon = \frac{2}{\pi} \arctan \left(V / \sqrt{Q^2 + U^2} \right), \quad (3.12)$$

де $\arctan2(y, x)$ — кут між вектором (x, y) та додатнім напрямком осі x .

На поляричних графіках (рисунки 3.9 та 4.6) пунктирними лініями позначено кут ϕ , а також симетричний до нього $\pi + \phi$. Еліптичність поляризації позначаємо, зафарбовуючи область від $\phi - \frac{\pi}{2} \cdot \varepsilon$ до $\phi + \frac{\pi}{2} \cdot \varepsilon$ (і аналогічно на протилежній гілці з додаванням π) червоним кольором для додатніх значень ε і синім — для від'ємних. Таким чином, за чисто кругових поляризацій $\varepsilon = \pm 1$ зафарбовані області з протилежних гілок торкатимуться одна одної.

3.2.3 Виродження за магнітним квантовим числом

Експерименти, описані в дисертації, проводяться на рівнях надтонкої структури рубідію-87. Ці рівні визначаються квантовим числом F , яке є власним значенням повного магнітного моменту атома F . Кожен із них є виродженим і містить $2F + 1$ підрівнів, які позначаються квантовим числом M . Це число може приймати цілі значення від $-F$ до $+F$ включно. Його називають *магнітним квантовим числом*, а відповідні підрівні — *магнітними*, або *зеєманівськими підрівнями*, бо магнітне квантове число визначає проекцію повного магнітного моменту на довільну заздалегідь обрану вісь. У слабкому магнітному полі рівні надтонкої структури розщеплюються на магнітні підрівні. Це явище називають *аномальним* або *складним ефектом Зеємана* на честь нідерландського фізика Пітера Зеємана (нід. *Pieter Zeeman*), який за відкриття цього явища отримав у 1902 році Нобелівську премію.

Фотон є частинкою зі спіном 1, тобто проекція спіна на довільну вісь може приймати три значення: $-1, 0, +1$. Але якщо виміряти всі проекції магнітних моментів на напрямок поширення фотонів (тобто вздовж волокна¹), то проекція спіна фотона (так звана *спіральність*) може приймати лише значення ± 1 . Ці два значення спіральності відповідають двом протилежним круговим поляризаціям світла.

¹Варто звернути увагу, що спонтанне випромінювання все ще може відбуватися в будь-якому напрямку, не тільки вздовж волокна. Тому проекція спіна спонтанного фотона може бути нульовою, і, відповідно, під час спонтанного переходу магнітне квантове число атома може не змінитися.

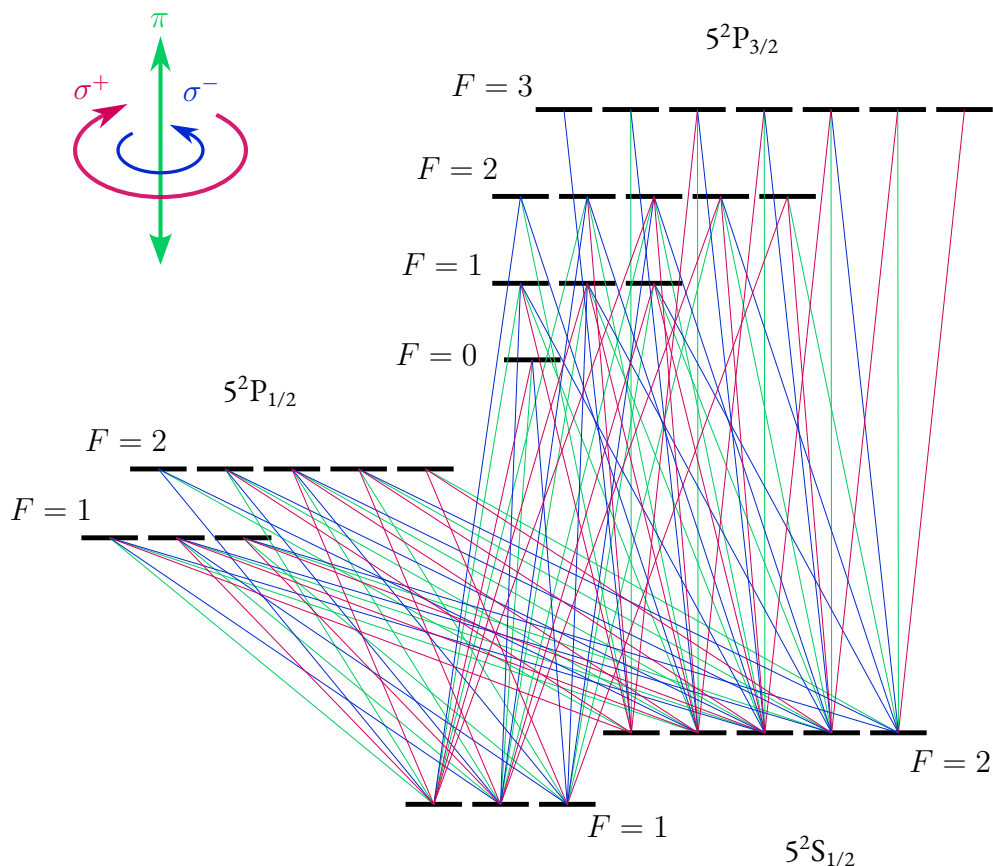


Рисунок 3.6: Магнітні підрівні рубідію-87 і переходи між ними. Колір кожного переходу відповідає поляризації (лінійній π та перпендикулярним до неї круговим σ^\pm), як показано в лівому верхньому кутку рисунка.

Враховуючи розглянуті аспекти і застосовуючи закон збереження моменту імпульса, отримуємо, що переходи різними між магнітними підрівнями (відносно осі волокна) відбуваються в результаті взаємодії з фотонами різних спіральностей, тобто зі світлом різних поляризацій. Атом, переходячи з нижнього рівня на верхній та поглинаючи фотон зі спіральністю (+1), збільшує своє магнітне квантове число на одиницю, а при поглинанні фотона із спіральністю (-1) — зменшує його на одиницю.

Отже, враховуючи поляризацію, ми зобов'язані враховувати і виродження за магнітним квантовим числом. Як видно з рисунка 3.6, рівні тонкої структури $5^2S_{1/2}$ і $5^2P_{1/2}$ мають разом по 8 зееманівських підрівнів, а рівень $5^2P_{3/2}$ — 16 підрівнів. Така велика кількість магнітних підрівнів і переходів між ними і є основним чинником, що впливає на алгоритмічну складність системи.

3.2.4 Подвійне заломлення в оптичних волокнах

Звичайні оптичні волокна, які працюють завдяки повному внутрішньому відбиттю, виготовляються на витяжних баштах. Заготовка макроскопічного розміру (діаметром порядку 1 mm–10 mm та довжиною до кількох метрів) підвищується на вершині башти, висота якої може сягати кількох десятків метрів, і нагрівається до температури, близької до температури склування заготовки. Нижній кінець заготовки стікає вниз, розтягуючись і потоншуючись до діаметра приблизно 100 μm і водночас охолоджується до кімнатної температури [174].

Так само, шляхом витягування з макроскопічної заготовки, виготовляються і порожнисті волокна, у тому числі використане в наших експериментах волокно з фотонним кристалом **HCPCBGF**. Наразі найпоширенішим способом виготовлення оптичних волокон із фотонними кристалами є багатократне витягування [175, 176]. Спочатку на башті витягуються одиночні порожнисті капіляри діаметром порядку 1 mm. Із цих капілярів вручну збирається заготовка діаметром у кілька сантиметрів, з якої вже витягують оптичне волокно.

Під час витягування волокна його профіль зазнає неконтрольованої деформації, що погіршує його оптичні характеристики. Як видно з рисунка 3.7, найбільшої деформації зазнає зовнішня частина волокна. Цю проблему долають, додаючи зовнішній шар в 1–2 капіляри до заготовки [176]. Проте під час витягування порожнистих волокон також деформується серцевина, що призводить до неконтрольованого подвійного заломлення [177]. Деформацію серцевини можна побачити і в нашому **HCPCBGF**-волокні — його профіль (у двох варіантах — із рекламних матеріалів на сайті виробника, і знімок реального волокна методом сканувальної електронної мікроскопії) зображено на рисунку 3.8.

Зараз цю проблему вирішують шляхом створення штучних дефектів у фотонному кристалі, контрольовано підсилюючи подвійне заломлення [178]. Такий підхід дозволяє створити волокно, яке зберігає поляризацію світла, якщо вона початково співпадає з однією з осей подвійного заломлення. Це забезпечує стабільність поляризації навіть при згині волокна. Проте, на сьогодні не створено волокон із фотонним кристалом та збереженням поляризації, діаметр серцевини яких був би менше 10 μm .

Таким чином, оптичне волокно у нашому експерименті характеризується сильним подвійним заломленням. Його вплив на електричне поле у волокні можна описати у формалізмі Джонса як лінійну залежність:

$$\vec{E}(z) = J(z) \cdot \vec{E}(0), \quad (3.13)$$

де $J(z)$ — (інтегральна) матриця Джонса [120, 179]:

$$J(z) = \cos\left(\frac{\alpha z}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - i \sin\left(\frac{\alpha z}{2}\right) \begin{pmatrix} \cos(\chi) & -i \sin(\chi) \\ +i \sin(\chi) & \cos(\chi) \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

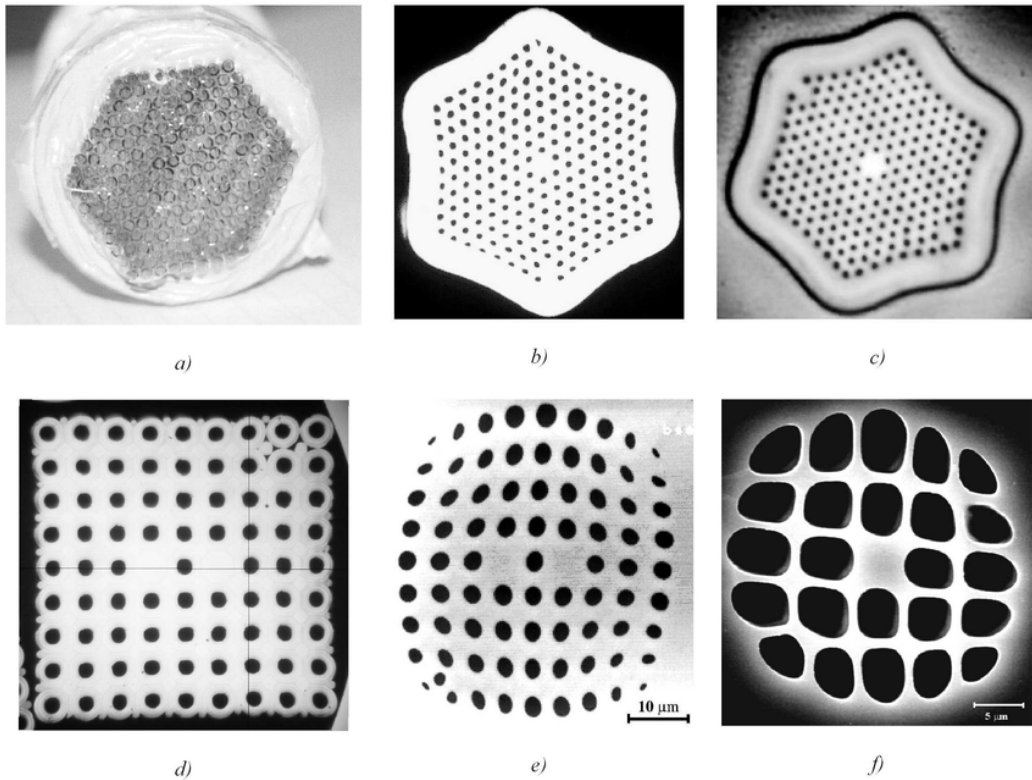


Рисунок 3.7: Заготовки та профілі готових волокон із фотонними кристалами: **a)** заготовка волокна з гексагональною ґраткою до витягування, діаметр отворів 1 mm; **b)** заготовка волокна з гексагональною ґраткою після першого витягування, діаметр отворів 250 μm ; **c)** готове волокно з гексагональною ґраткою діаметром 120 μm із отворами діаметром 3 μm ; **d)** заготовка волокна з квадратною ґраткою та подвійною серцевиною; **e)** готове волокно з квадратною ґраткою та подвійною серцевиною діаметром 250 μm із отворами діаметром 2.5 μm ; **f)** готове багатомодове волокно з квадратною ґраткою діаметром 160 μm із отворами діаметром 3 μm . Зображення взяті з [176].

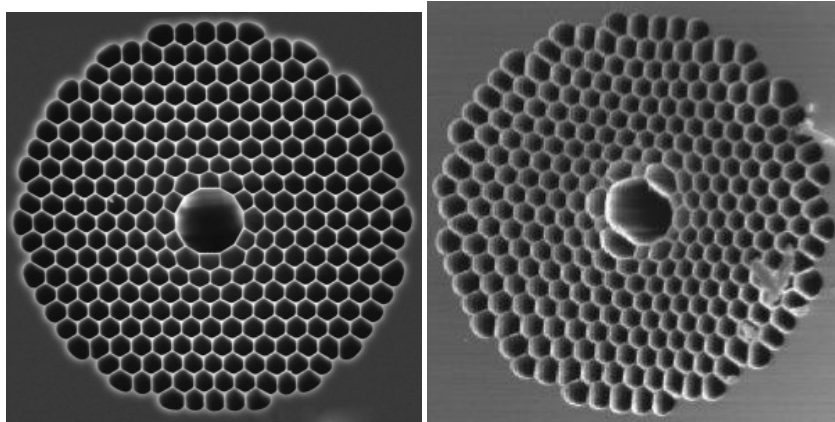


Рисунок 3.8: Профіль **HCPCBGF**-волокна NKT Photonics HC-800-02, яке використовується в експериментах. **Зліва** зображення рекламного характеру з сайту виробника <https://www.nktphotonics.com/>, **справа** – знімок волокна, отриманий експериментальною групою за допомогою сканувальної електронної мікроскопії

Коефіцієнти α та χ в цій матриці було виміряно в експерименті, описаному в [120]: коефіцієнт лінійного подвійного заломлення $\alpha = 749.2(2)$ rad/m, коефіцієнт кругового подвійного заломлення $\chi = 0.50(5)$ rad. На рисунку 3.9 показано графік зміни поляризації світла всередині волокна в залежності від координати. На початку волокна поляризацію задано лінійною, але на відстані приблизно 2 mm вона стає майже круговою — протилежні зафарбовані області майже торкаються одна одної (чисельно еліптичність поляризації досягає 80%).

3.2.5 Інші вимоги

Дослідження за допомогою чисельної моделі в дисертації включає конкретні експерименти, такі як створення джерела біфотонів на основі чотирихвильової взаємодії та суперфлуоресценція в неоднорідному середовищі. Обидва явища мають квантову природу: як атоми, так і світло в них розглядаються як квантові об'єкти. У випадку суперфлуоресценції квантова природа світла проявляється лише на початковому етапі, далі кількість фотонів (а, отже, і розмірність простору квантових станів) лавиноподібно зростає.

Щодо джерела біфотонів, нас цікавлять лише поляризації отриманих фотонів — кореляції між ними можна порахувати аналітично, що і було зроблено Енно Гізе (*Enno Giese*) у [13] (теорію також викладено у розділі 4.8). Тому використання напівкласичного наближення є доцільним, а квантовий характер світла за малих кількостей фотонів можна імітувати, наприклад, додаючи випадковий доданок до поля. Докладніше це обговорюватиметься в розділах 4 та 5.

Оскільки суперфлуоресценція є нестационарним явищем, для нас ключовою є

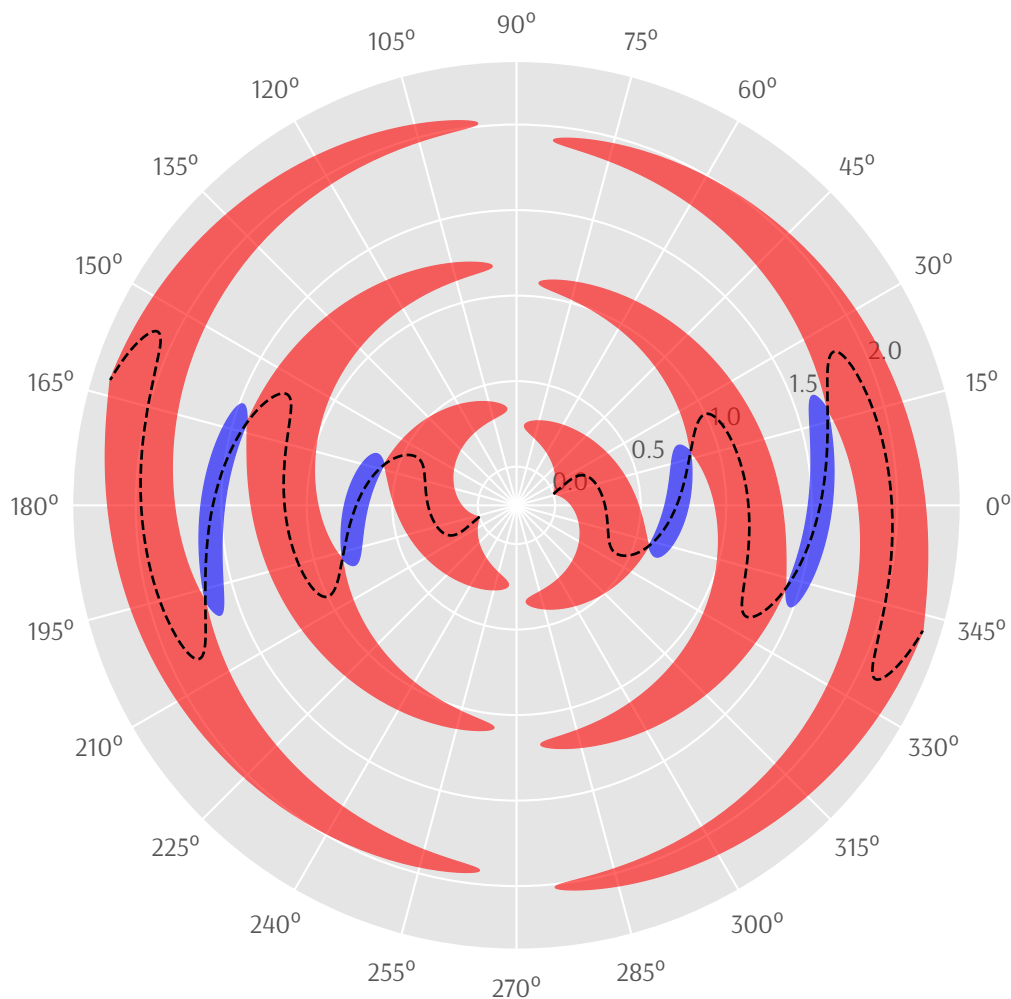


Рисунок 3.9: Залежність поляризації всередині **HPCBGF**, використаного в експериментах із розділів 4 та 5, від координати в сантиметрах (**радіальна вісь**). **Чорна пунктирна лінія** відображає нахил великої осі поляризаційного еліпса відносно власної осі волокна, а **ширина синіх та червоних областей** навколо неї – еліптичність поляризації. Графік складається з двох однакових гілок, повернутих одна відносно одної на 180° внаслідок симетрії поляризації. За кругової поляризації зафарбовані області з протилежних гілок торкалися б одна до одної. **Колір зафарбованих областей** відповідає знаку еліптичності поляризації. Детальніше позначення поляризації описані в розділі 3.2.2.

часова еволюція як квантового стану атомів, так і (класичного) стану полів. Щодо просторового розподілу, найважливішим є розподіл уздовж волокна: довжина згустка атомів складає приблизно 2 см, а поперечний $1/e$ -радіус — 1.7 μm . Таким чином, чисельну модель буде сформульовано як двовимірну, з однією часовою та однією просторовою координатою.

3.3 Основні рівняння чисельної моделі

Сформулювавши вимоги до чисельної моделі, випишемо тепер систему диференціальних рівнянь, що лягли в її основу, а також початкові та граничні умови до них.

3.3.1 Квантові оператори в матричній формі

Оскільки ми маємо розглядати системи з десятками рівнів, зручніше формулювати всі рівняння в матричній формі. Це дозволяє абстрагуватися від конкретної схеми рівнів, зробивши чисельну модель більш універсальною. Замість того, щоб позначати квантовий оператор як одну велику матрицю, розділимо рівні на «верхні» та «нижні» таким чином, що всі переходи з одного верхнього рівня на інший верхній, а також із одного нижнього рівня на інший нижній є забороненими.

Тоді, позначаючи верхні рівні літерою e , а нижні — літерою g , ми можемо записати довільний квантовий оператор \hat{O} як блочну матрицю²:

$$\hat{O} = \begin{bmatrix} O_{gg} & O_{ge} \\ O_{eg} & O_{ee} \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Очевидно, що якщо оператор \hat{O} є ермітовим, то $O_{gg} = O_{gg}^+$, $O_{ge} = O_{eg}^+$, $O_{ee} = O_{ee}^+$.

3.3.2 Поширення світла

Рівняння, що використовуються в чисельній моделі, є напівкласичними: стан середовища та його еволюція формулюється квантово (за допомогою формалізму матриці густини), але світло розглядається як класичне електромагнітне поле, що поширюється за рівняннями Максвелла. За відсутності зарядів і струмів, а також нехтуючи магнітним моментом атомів, але враховуючи їх електричний дипольний момент, ми можемо звести рівняння Максвелла до одного рівняння поширення хвиль³:

$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} (\vec{E} + 4\pi \vec{P}) + \mathcal{J} \cdot \vec{E}. \quad (3.16)$$

²Тут і далі блочні матриці записуватимуться у квадратних дужках, а звичайні числові — у круглих.

³Тут і далі використовується гаусова система одиниць.

Тут також враховано подвійне заломлення середовища за допомогою диференціальної матриці Джонса $\mathcal{J}(z) = J'(z) \cdot J^{-1}(z)$ [179], яка в лінійному базисі виглядає так:

$$\mathcal{J}(z) = -i\frac{\alpha}{2} \begin{pmatrix} \cos(\chi) & -i \sin(\chi) \\ +i \sin(\chi) & -\cos(\chi) \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Розкладаючи поле на пласкі хвилі:

$$\vec{E} = \sum_{m \in \text{modes}} \frac{\mathcal{E}_m}{2} \exp(ikct - ikz) + \text{conj.}, \quad (3.18)$$

і так само розкладаючи поляризацію на частотні компоненти, вираховуючи їх як квантові середні величини:

$$\vec{P} = n \langle \vec{d} \rangle = \sum_{m \in \text{modes}} \vec{e}_m n d_{ge}^m \rho_{eg} \exp(ik_m ct - ik_m z) + \text{conj.}, \quad (3.19)$$

ми отримуємо

$$\cancel{\frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial t}} + \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial z} + \cancel{\frac{i}{2k_m} \Delta_{xy} \mathcal{E}_m} = \sum_{m' \in \text{modes}} \mathcal{J}_{mm'} \mathcal{E}_{m'} - 4\pi i k_m n \text{tr}(d_{ge}^m \cdot \rho_{eg}). \quad (3.20)$$

Тут \mathcal{E}_m є комплексною амплітудою поля в моді m , k_m є її хвильовим числом (без урахування \vec{P}), n є концентрацією атомів за координатами (x, y, z) , \hat{d}^m і $\hat{\rho}$ є операторами відповідно дипольного моменту за модою m і матриці густини.

У рівнянні (3.20) ми, по перше, нехтуємо часовою похідною, бо вважаємо, що характерний час зміни \mathcal{E}_m є значно більшим за характерний час поширення хвилі L/c , де L — довжина середовища.

По-друге, ми також нехтуємо лапласіаном $\Delta_{xy} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, таким чином повністю нехтуючи радіальною структурою, так що задача стає чисто одновимірною. Це спрощення є найбільш сильним, і саме воно не дозволяє нашій моделі кількісно відтворювати експеримент.

Щоб установити відповідність між розподілом атомів у реальному волокні та чисельній моделі, зрівняємо **OD** в обох випадках. У чисельній моделі **OD** обчислюється як

$$\text{OD} = \int_0^L \frac{S_{FF'}}{3} \sigma_0 n(z) dz, \quad (3.21)$$

а в реальному волокні з урахуванням радіальної структури — наступним чином:

$$\text{OD} = \int_0^L dz \int_0^\infty 2\pi r dr \cdot \frac{S_{FF'}}{3} \sigma_0 n(r, z) \frac{I(r)}{I(0)}, \quad (3.22)$$

де n — локальна концентрація атомів, а I в тривимірному випадку — радіальний розподіл інтенсивності світла. У наших експериментах і поля, і атоми розподілені за гаусовим законом:

$$n(r, z) = \frac{N}{\pi R^2 \cdot \sqrt{2\pi} \frac{L}{6}} \exp\left(-\frac{r^2}{R^2} - \frac{z^2}{2(L/6)^2}\right), \quad I(r) = I_0 \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2}\right). \quad (3.23)$$

Радіальний розподіл інтенсивності та атомів визначаються відповідно $1/e^2$ -«талією» w та $1/e$ -радіусом R . За координатою атоми також розподілені за гаусовим законом, і ширину розподілу тут обрано за «правилом трьох сигм», так щоб 99% усіх атомів знаходилися в інтервалі від 0 до L .

Порівнюючи **ОД** в одновимірній та тривимірній моделі, ми отримуємо концентрацію атомів в одновимірній моделі:

$$n(z) = \frac{2N}{\pi} \cdot \frac{1}{w^2 + 2R^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}(L/6)} \exp\left(-\frac{z^2}{2(L/6)^2}\right). \quad (3.24)$$

3.3.3 Часова еволюція квантового стану атомів

Квантовий стан атомів описуватимемо у формалізмі матриці густини $\hat{\rho}$, що еволюціонує з часом за рівнянням Ліндблада:

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -i \left[\frac{\hat{H}}{\hbar}, \hat{\rho} \right] + \text{decay} + \text{decoherence}. \quad (3.25)$$

Гамільтоніан \hat{H} отримуємо у наближенні RWA:

$$\hat{H} = \hbar \begin{bmatrix} \Delta_g & \Omega_{ge}/2 \\ \Omega_{eg}/2 & \Delta_e \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Тут матриці Δ_g і Δ_e є діагональними, на їхніх діагоналях записані суми відстройок відповідних мод. Матриці $\Omega_{ge} = \Omega_{eg}^+$ є підматрицями оператора частоти Рабі:

$$\hbar \hat{\Omega} = \sum_{m \in \text{modes}} \mathcal{E}_m d^m. \quad (3.27)$$

Релаксаційний член decay у рівнянні (3.25) описує спонтанне випромінення:

$$\text{decay} = \begin{pmatrix} \Gamma R_g \circ C_{ge} \cdot \sigma_{ee} \cdot C_{eg} & -\frac{\Gamma}{2} \sigma_{ge} \\ -\frac{\Gamma}{2} \sigma_{eg} & -\Gamma \sigma_{ee} \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Тут матриці $C_{ge} = C_{eg}^+$ визначаються квантовими числами конкретних рівнів. Наприклад, для підрівнів надтонкої структури атомів лужних металів ці коефіцієнти обраховуються через 3-ї та 6-ї символи Вігнера наступним чином [180]:

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{array}{c} J_e \\ F_e \\ M_e \end{array} \left| C_{eg} \right| \begin{array}{c} J_g \\ F_g \\ M_g \end{array} \right\rangle &= \frac{2J_g + 1}{2J_e + 1} \cdot (-1)^{2F_e + J_g + I + M_g} \times \\ &\times \sqrt{(2F_e + 1)(2J_g + 1)} \cdot \left\{ \begin{array}{ccc} J_g & J_e & 1 \\ F_e & F_g & I \end{array} \right\} \times \\ &\times \sqrt{2F_g + 1} \cdot \begin{pmatrix} F_e & 1 & F_g \\ M_g & M_e - M_g & -M_g \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Операція \circ позначає поелементний добуток матриць, а матриця R_g у випадку надтонкої структури лужних металів є символом Кронекера квантового числа F :

$$\left\langle \begin{array}{c} J_e \\ F_e \\ M_e \end{array} \left| R_g \right| \begin{array}{c} J_g \\ F_g \\ M_g \end{array} \right\rangle = \delta_{JJ'} \delta_{FF'}. \quad (3.30)$$

Член decoherence у рівнянні (3.25) відповідає за розфазування між різними атомами через те, що їх рівні не співпадають точно за енергією. Причиною цьому може бути, наприклад, ненульова температура або фонові магнітні поля. Оскільки для верхніх рівнів та оптичних когерентностей час життя набагато коротший за характерний час розфазування, ми враховуватимемо його тільки для нижніх рівнів:

$$\text{decoherence} = \begin{pmatrix} -\gamma \circ \rho_{gg} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

$$\left\langle \begin{array}{c} J_1 \\ F_1 \\ M_1 \end{array} \left| \gamma \right| \begin{array}{c} J_2 \\ F_2 \\ M_2 \end{array} \right\rangle \begin{cases} = 0 \text{ якщо } J_1 = J_2, F_1 = F_2 \text{ та } M_1 = M_2; \\ \sim 0.1\Gamma \text{ інакше.} \end{cases} \quad (3.32)$$

Підставляючи всі матриці у рівняння (3.25), а також додаючи рівняння (3.20), отримуємо для окремих підматриць наступну систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{gg}}{\partial t} &= i[\rho_{gg}, \Delta_g] + \frac{i}{2} (\sigma_{ge} \cdot \Omega_{eg} - \Omega_{ge} \cdot \sigma_{eg}) \\ &\quad + \Gamma R_g \circ C_{ge} \cdot \rho_{ee} \cdot C_{eg} - \gamma \circ \rho_{gg}, \\ \frac{\partial \rho_{eg}}{\partial t} &= i(\rho_{eg} \cdot \Delta_g - \Delta_e \cdot \rho_{eg}) + i(\rho_{ee} \cdot \Omega_{eg} - \Omega_{eg} \cdot \rho_{gg}) - \frac{\Gamma}{2} \rho_{eg}, \\ \frac{\partial \rho_{ee}}{\partial t} &= i[\rho_{ee}, \Delta_e] + \frac{i}{2} (\rho_{eg} \cdot \Omega_{ge} - \Omega_{eg} \rho_{ge}) - \Gamma \rho_{ee}, \\ \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial z} &= \sum_{m' \in \text{modes}} J_{mm'} \mathcal{E}_m - 4\pi i k_m n \text{tr} (d_{ge}^m \cdot \rho_{eg}). \end{aligned} \quad (3.33)$$

3.4 Початкові та граничні умови

Щоб завершити опис теорії, ми також маємо надати початкові та граничні умови. Як граничні умови ми задаємо тільки поле. В експерименті контрольні поля вмикуються в певний момент часу (цей момент приймається за нуль), причому під час ввімкнення поле плавно зростає протягом $T \sim 100$ ns. Щоб зімітувати це плавне ввімкнення, ми задаємо поле на початку середовища наступним чином:

$$\mathcal{E}_m(z=0, t) = \begin{cases} \mathcal{E}_m^0 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{t}{T}\right) & \text{якщо } t < T; \\ \mathcal{E}_m^0 & \text{інакше.} \end{cases} \quad (3.34)$$

Як початкові умови ми, навпаки, задаємо тільки квантовий стан атомів.

Якщо досліджуване явище повністю описується напівкласичною теорією (наприклад, ЕІТ), то граничні поля та початковий квантовий стан атомів задаються відповідно до експерименту. Проте, якщо явище є чисто квантовим (наприклад, суперфлуоресценція), то для врахування квантових флуктуацій початкові чи граничні умови змінюються певним нетривіальним чином. Більш конкретно це обговоримо в розділах 4 та 5, розглядаючи конкретні чисельні експерименти.

3.5 Оптимізація чисельної моделі

У попередньому розділі було отримано систему рівнянь (3.33), яка описує просторовий розподіл та часову еволюцію полів та квантового стану атомів. У цьому розділі ці рівняння буде оптимізовано для чисельного розв'язання за допомогою одного з методів Рунге-Кутта, а саме метода Кутта-Мерсона. Для оптимізації буде використано математичний апарат, описаний у [181, 182] із поширенням його на комплексні матриці.

3.5.1 Векторизація

У системі (3.33) невідомими величинами є, крім полів \mathcal{E}_m , також матриці густини ρ_{gg} , $\rho_{eg} = \rho_{ge}^+$ та ρ_{ee} . Але для майбутніх перетворень ці матриці зручніше буде представити у вигляді векторів за допомогою *векторизації*. Це перетворення описане, наприклад, у [182, section 2.4], але ми використовуватимемо впорядкування по рядках замість впорядкування по стовпчиках, тобто, наприклад,

$$\mathbf{v} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

Такий порядок обрано через те, що симуляцію було реалізовано мовою Python 3 з використанням бібліотек NumPy та SciPy. На відміну від, наприклад, MATLAB, елементи NumPy-матриці (т.зв. *ndarray*) у пам'яті впорядковані по рядках, що відповідає мові програмування C, якою написано інтерпретатор Python та низькорівневий код numpy. Тому векторизація за цим впорядкуванням є безкоштовною операцією, що не потребує жодних обчислень, копіювань даних чи виділення додаткової пам'яті. До того ж алгоритми, що використовують таке впорядкування, мають частіше використовувати замість основної пам'яті більш швидкий кеш процесора і таким чином працювати швидше.

Добуток матриць, будучи лінійною операцією, може бути векторизований наступним чином:

$$v(A \cdot X \cdot B) = (A \otimes B^T) \cdot v(X), \quad (3.36)$$

$$v(A \cdot X) = (A \otimes I_n) \cdot v(X), \quad (3.37)$$

$$v(X \cdot B) = (I_m \otimes B) \cdot v(X). \quad (3.38)$$

Тут матриця X має розмір $m \times n$, а матриці I_m та I_n — це одиничні матриці відповідного розміру. Операція \otimes — це добуток Кронекера, означення якого наведено у [182, section 2.2]. У симуляції використано реалізацію добутку Кронекера з бібліотеки *scipy*.

Для комутатора $[X, A]$ та антикомутатора $\{X, A\}$ ми маємо (тепер усі матриці мають бути квадратними та однакового розміру)

$$v[X, A] = (I \otimes A^T - A \otimes I) \cdot v(X), \quad (3.39)$$

$$v\{X, A\} = (I \otimes A^T + A \otimes I) \cdot v(X). \quad (3.40)$$

Слід добутку двох матриць є скалярним добутком їхніх векторизацій:

$$\text{tr}(A \cdot B) = \sum_{i,j} A_{ji} B_{ij} = \sum_{i,j} (A^T)_{ij} B_{ij} = v(A^T) \cdot v(B). \quad (3.41)$$

Застосовуючи всі вищезазначені правила, ми можемо векторизувати (3.33) і

отримати наступну систему:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v(\rho_{gg})}{\partial t} &= i(I_g \otimes \Delta_g - \Delta_g \otimes I_g) \cdot v(\rho_{gg}) - v(i\Omega_{ge} \cdot \rho_{eg})^H \\
&\quad + \Gamma \, dv(R_g) \cdot (C_{ge} \otimes C_{ge}) \cdot v(\rho_{ee}) - dv(\gamma) \cdot v(\rho_{gg}), \\
\frac{\partial v(\rho_{eg})}{\partial t} &= i(I_e \otimes \Delta_g - \Delta_e \otimes I_g) \cdot v(\rho_{eg}) + \frac{i}{2}(I_e \otimes \Omega_{eg}^T) \cdot v(\rho_{ee}) \\
&\quad - \frac{i}{2}(\Omega_{eg} \otimes I_g) \cdot v(\rho_{gg}) - \frac{\Gamma}{2} v(\rho_{eg}), \\
\frac{\partial v(\rho_{ee})}{\partial t} &= i(I_e \otimes \Delta_e - \Delta_e \otimes I_e) \cdot v(\rho_{ee}) + v(\rho_{eg} \cdot i\Omega_{ge})^H \\
&\quad - \Gamma v(\rho_{ee}), \\
\frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial z} &= \sum_{m' \in \text{modes}} J_{mm'} \mathcal{E}_{m'} - 4\pi i k_m n \, \text{tr}(d_{ge}^m \cdot \rho_{eg}).
\end{aligned} \tag{3.42}$$

У цій системі I_g та I_e є одиничними матрицями розмірів відповідно $g \times g$ та $e \times e$, $dv(M) = \text{diag}(v(M))$, а знак H означає ермітову частину матриці:

$$M^H = \frac{M + M^+}{2}. \tag{3.43}$$

3.5.2 Вираження ермітових матриць у дійсних числах

У системі (3.42) нееквівалентною лишається операція ермітового спряження. Але через обмеження комплексної алгебри (неможливо помножити довільне число ζ на комплексну константу і отримати ζ^* , хоча комплексне спряження і є лінійною операцією) векторизувати її в комплексних числах не є таким простим завданням. Замість цього було вирішено виразити всі матриці в дійсних числах. Це не тільки дозволяє уникнути зазначених обмежень, але й дозволяє усунути надлишковість, що виникає внаслідок того, що квантові оператори є ермітовими, і таким чином зменшити розмірність задачі на половину.

Почнемо з ермітових матриць, таких як ρ_{gg} та ρ_{ee} . Будь-яку ермітову матрицю можна представити у вигляді суми симетричної дійсної матриці та антисиметричної уявної:

$$M = S + iA = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} + ia_{12} & \cdots & s_{1n} + ia_{1n} \\ s_{12} - ia_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2n} + ia_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{1n} - ia_{1n} & s_{2n} - ia_{2n} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3.44}$$

Запишемо дійсні частини елементів у верхньо-трикутній частині нової матри-

ці M_r , а уявні — в нижньо-трикутній:

$$M_r = S_{\text{diag}} + (S_{\text{upper}} - A_{\text{lower}})\sqrt{2} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12}\sqrt{2} & \cdots & s_{1n}\sqrt{2} \\ a_{12}\sqrt{2} & s_{22} & \cdots & s_{2n}\sqrt{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}\sqrt{2} & a_{2n}\sqrt{2} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix}. \quad (3.45)$$

Оскільки залежність $M(M_r)$ є лінійною, то для векторизованих матриць цю лінійну залежність можна записати за допомогою матриці переходу D_n :

$$v(M) = D_n \cdot v(M_r). \quad (3.46)$$

Векторизацію матриці M_r ми, зберігаючи термінологію [182], називатимемо напіввекторизацією ([англ. half-vectorization](#)) матриці M :

$$\text{vh}(M) = v(M_r) = D_n^{-1} \cdot v(M). \quad (3.47)$$

Матрицю переходу D_n , так само аналогічно [182], називатимемо матрицею подвоєння ([англ. duplication matrix](#)), а обернену матрицю $L_n = D_n^{-1}$ — матрицею знищення ([англ. elimination matrix](#)). Ці матриці мають розмірність $n^2 \times n^2$, але вони є розрідженими: всі їхні елементи, окрім наступних, дорівнюють нулю:

$$\forall i, j \in \overline{0, n-1} \rightarrow \begin{cases} (D_n)_{(ni+j+1), (ni+j+1)} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{if } i < j; \\ 1 & \text{if } i = j; \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \text{if } i > j; \end{cases} \\ (D_n)_{(ni+j+1), (nj+i+1)} = \begin{cases} +\frac{i}{\sqrt{2}} & \text{if } i < j; \\ 0 & \text{if } i = j; \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{if } i > j. \end{cases} \end{cases} \quad (3.48)$$

так що загальна кількість ненульових елементів у матриці D_n залежить від кількості рівнів n як $O(n^2)$.

Наприклад, у випадку $n = 3$ маємо

$$D_3 = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1/\sqrt{2} & \cdot & i/\sqrt{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1/\sqrt{2} & \cdot & \cdot & \cdot & i/\sqrt{2} & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1/\sqrt{2} & \cdot & -i/\sqrt{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1/\sqrt{2} & \cdot & i/\sqrt{2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1/\sqrt{2} & \cdot & \cdot & \cdot & -i/\sqrt{2} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1/\sqrt{2} & \cdot & -i/\sqrt{2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

Варто також зазначити, що матриця D_n є унітарною, адже її можна одночасно однаковою перестановкою рядків і стовпчиків перетворити на блочно-діагональну, що є прямою сумою одиничної матриці розміру $n \times n$ та $\frac{n^2-n}{2}$ унітарних блоків $\begin{pmatrix} 1 & i \\ \cdot & -i \end{pmatrix} / \sqrt{2}$. Тому обернена їй матриця знищення L_n дорівнює ермітово спряженій: $L_n = D_n^{-1} = D_n^+$.

Після напіввекторизації ермітових матриць ρ_{gg} та ρ_{ee} , а також їхніх часових похідних, система (3.42) приймає наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{vh}(\rho_{gg})}{\partial t} &= iD_g^{-1} \cdot (I_g \otimes \Delta_g - \Delta_g \otimes I_g) \cdot D_g \cdot \text{vh}(\rho_{gg}) \\ &\quad - \text{vh}(i\Omega_{ge} \cdot \rho_{eg})^H \\ &\quad + \Gamma \text{dv}(R_g) \cdot D_g^{-1} \cdot (C_{ge} \otimes C_{ge}) \cdot D_e \cdot \text{vh}(\rho_{ee}) \\ &\quad - \text{dv}(\gamma) \cdot \text{vh}(\rho_{gg}), \\ \frac{\partial \text{v}(\rho_{eg})}{\partial t} &= i(I_e \otimes \Delta_g - \Delta_e \otimes I_g) \cdot \text{v}(\rho_{eg}) \\ &\quad + \left(I_e \otimes \frac{i\Omega_{eg}^T}{2} \right) \cdot D_e \cdot \text{vh}(\rho_{ee}) \\ &\quad - \left(\frac{i\Omega_{eg}}{2} \otimes I_g \right) \cdot D_g \cdot \text{vh}(\rho_{gg}) - \frac{\Gamma}{2} \text{v}(\rho_{eg}), \\ \frac{\partial \text{vh}(\rho_{ee})}{\partial t} &= iD_e^{-1} \cdot (I_e \otimes \Delta_e - \Delta_e \otimes I_e) \cdot D_e \cdot \text{vh}(\rho_{ee}) \\ &\quad + \text{vh}(\rho_{eg} \cdot i\Omega_{ge})^H - \Gamma \text{vh}(\rho_{ee}), \\ \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial z} &= \sum_{m' \in \text{modes}} J_{mm'} \mathcal{E}_m - 4\pi i k_m n \text{tr}(d_{ge}^m \cdot \rho_{eg}). \end{aligned} \quad (3.50)$$

3.5.3 Векторизація неермітових матриць

Переходимо до неермітових матриць. Система 3.50 має лише дві такі матриці — ρ_{eg} та Ω_{eg} . Їхнє представлення в дійсних числах буде простішим, ніж для ермітових матриць — ми просто розкладемо ці матриці на дійсну та уявну частини:

$$v(\rho_{eg}) = v(\rho_r) + i v(\rho_i). \quad (3.51)$$

Тоді для рівнянь із похідними $\partial\rho_{eg}/\partial t$ ми маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(\rho_r)}{\partial t} &= (I_e \otimes \Delta_g - \Delta_e \otimes I_g) \cdot \text{Re}[i v(\rho_{eg})] \\ &\quad + \text{Re} \left[\left(I_e \otimes \frac{i\Omega_{eg}^T}{2} \right) \cdot D_e \right] \cdot \text{vh}(\rho_{ee}) \\ &\quad - \text{Re} \left[\left(\frac{i\Omega_{eg}}{2} \otimes I_g \right) \cdot D_g \right] \cdot \text{vh}(\rho_{gg}) - \frac{\Gamma}{2} v(\rho_r), \\ \frac{\partial v(\rho_i)}{\partial t} &= (I_e \otimes \Delta_g - \Delta_e \otimes I_g) \cdot \text{Im}[i v(\rho_{eg})] \\ &\quad + \text{Im} \left[\left(I_e \otimes \frac{i\Omega_{eg}^T}{2} \right) \cdot D_e \right] \cdot \text{vh}(\rho_{ee}) \\ &\quad - \text{Im} \left[\left(\frac{i\Omega_{eg}}{2} \otimes I_g \right) \cdot D_g \right] \cdot \text{vh}(\rho_{gg}) - \frac{\Gamma}{2} v(\rho_i). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Підставляючи визначення частоти Рабі:

$$\Omega_{eg} = \frac{1}{\hbar} \sum_m \mathcal{E}_m d_{eg}^m, \quad (3.53)$$

і виділяючи в наступних виразах дійсні та уявні частини:

$$i v(\rho_{eg}) = i v(\rho_r) - v(\rho_i), \quad (3.54)$$

$$\left(I_e \otimes \frac{i\Omega_{eg}^T}{2} \right) \cdot D_e = \frac{1}{2\hbar} \sum_m I_e \otimes d_{ge}^m \cdot (i \text{Re}[\mathcal{E}_m D_e] + \text{Re}[i\mathcal{E}_m D_e]), \quad (3.55)$$

$$\left(\frac{i\Omega_{eg}}{2} \otimes I_g \right) \cdot D_g = \frac{1}{2\hbar} \sum_m d_{eg}^m \otimes I_g \cdot (i \text{Re}[\mathcal{E}_m D_g] + \text{Re}[i\mathcal{E}_m D_g]), \quad (3.56)$$

отримуємо

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v(\rho_r)}{\partial t} &= -(I_e \otimes \Delta_g - \Delta_e \otimes I_g) \cdot v(\rho_i) - \frac{\Gamma}{2} v(\rho_r) \\
&\quad + \frac{1}{2\hbar} \sum_m \left(\begin{array}{l} I_e \otimes d_{ge}^m \cdot \text{Re}[i\mathcal{E}_m D_e] \cdot \text{vh}(\rho_{ee}) \\ - d_{eg}^m \otimes I_g \cdot \text{Re}[i\mathcal{E}_m D_g] \cdot \text{vh}(\rho_{gg}) \end{array} \right), \\
\frac{\partial v(\rho_i)}{\partial t} &= +(I_e \otimes \Delta_g - \Delta_e \otimes I_g) \cdot v(\rho_r) - \frac{\Gamma}{2} v(\rho_i) \\
&\quad + \frac{1}{2\hbar} \sum_m \left(\begin{array}{l} I_e \otimes d_{ge}^m \cdot \text{Re}[\mathcal{E}_m D_e] \cdot \text{vh}(\rho_{ee}) \\ - d_{eg}^m \otimes I_g \cdot \text{Re}[\mathcal{E}_m D_g] \cdot \text{vh}(\rho_{gg}) \end{array} \right).
\end{aligned} \tag{3.57}$$

3.5.4 Векторизація ермітової частини матриці

Останньою операцією, яку ще потрібно векторизувати, є ермітова частина M^H . Її можна розкрити наступним чином:

$$v(M^H) = v\left(\frac{M_r + M_r^T}{2}\right) + i v\left(\frac{M_i - M_i^T}{2}\right) = S_n \cdot v(M_r) + i A_n \cdot v(M_i). \tag{3.58}$$

Для напіввекторизації ми ще маємо помножити весь вираз на матрицю знищення D_n^{-1} :

$$\text{vh}(M^H) = D_n^{-1} \cdot S_n \cdot v(M_r) + i D_n^{-1} \cdot A_n \cdot v(M_i). \tag{3.59}$$

У рівняннях вище, S_n є матрицею симетризації, а A_n — матрицею антисиметризації. Їх можна виразити через описану в [182, section 3.7] матрицю комутації (англ. *commutation matrix*) K_n наступним чином:

$$S_n = \frac{I_{n^2} + K_n}{2}, \quad A_n = \frac{I_{n^2} - K_n}{2}. \tag{3.60}$$

Насправді, ермітова частина в наших рівняннях зустрічається в двох виразах: $(i\Omega_{ge} \cdot \rho_{eg})^H$ та $(\rho_{eg} \cdot i\Omega_{eg})^H$. Ми векторизуємо їх так:

$$\begin{aligned}
\text{vh}(i\Omega_{ge} \cdot \rho_{eg}) &= \frac{1}{\hbar} \sum_m \text{Re} [i\mathcal{E}_m D_g^{-1} \cdot (A_g - S_g) \cdot d_{ge}^m \otimes I_g] \cdot v(\rho_r) \\
&\quad + \frac{1}{\hbar} \sum_m \text{Re} [\mathcal{E}_m D_g^{-1} \cdot (A_g - S_g) \cdot d_{ge}^m \otimes I_g] \cdot v(\rho_i),
\end{aligned} \tag{3.61}$$

$$\begin{aligned}
\text{vh}(\rho_{eg} \cdot i\Omega_{ge}) &= \frac{1}{\hbar} \sum_m \text{Re} [i\mathcal{E}_m D_e^{-1} \cdot (A_e - S_e) \cdot I_e \otimes d_{eg}^m] \cdot v(\rho_r) \\
&\quad + \frac{1}{\hbar} \sum_m \text{Re} [\mathcal{E}_m D_e^{-1} \cdot (A_e - S_e) \cdot I_e \otimes d_{eg}^m] \cdot v(\rho_i).
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Тепер ми можемо записати рівняння в такому вигляді, який можна використувати в чисельному алгоритмі:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \text{vh}(\rho_{gg})}{\partial t} &= iD_g^{-1} \cdot (I_g \otimes \Delta_g - \Delta_g \otimes I_g) \cdot D_g \cdot \text{vh}(\rho_{gg}) \\
&\quad + \Gamma \text{dv}(R_g) \cdot D_g^{-1} \cdot (C_{ge} \otimes C_{ge}) \cdot D_e \cdot \text{vh}(\rho_{ee}) - \text{dv}(\gamma) \cdot \text{vh}(\rho_{gg}) \\
&\quad - \frac{1}{\hbar} \sum_m \text{Re} [i\mathcal{E}_m D_g^{-1} \cdot (A_g - S_g) \cdot d_{ge}^m \otimes I_g] \cdot v(\rho_r) \\
&\quad - \frac{1}{\hbar} \sum_m \text{Re} [\mathcal{E}_m D_g^{-1} \cdot (A_g - S_g) \cdot d_{ge}^m \otimes I_g] \cdot v(\rho_i), \\
\frac{\partial v(\rho_r)}{\partial t} &= -(I_e \otimes \Delta_g - \Delta_e \otimes I_g) \cdot v(\rho_i) - \frac{\Gamma}{2} v(\rho_r) \\
&\quad + \frac{1}{2\hbar} \sum_m \left(\begin{array}{l} I_e \otimes d_{ge}^m \cdot \text{Re}[i\mathcal{E}_m D_e] \cdot \text{vh}(\rho_{ee}) \\ - d_{eg}^m \otimes I_g \cdot \text{Re}[i\mathcal{E}_m D_g] \cdot \text{vh}(\rho_{gg}) \end{array} \right), \\
\frac{\partial v(\rho_i)}{\partial t} &= +(I_e \otimes \Delta_g - \Delta_e \otimes I_g) \cdot v(\rho_r) - \frac{\Gamma}{2} v(\rho_i) \\
&\quad + \frac{1}{2\hbar} \sum_m \left(\begin{array}{l} I_e \otimes d_{ge}^m \cdot \text{Re}[\mathcal{E}_m D_e] \cdot \text{vh}(\rho_{ee}) \\ - d_{eg}^m \otimes I_g \cdot \text{Re}[\mathcal{E}_m D_g] \cdot \text{vh}(\rho_{gg}) \end{array} \right), \\
\frac{\partial \text{vh}(\rho_{ee})}{\partial t} &= iD_e^{-1} \cdot (I_e \otimes \Delta_e - \Delta_e \otimes I_e) \cdot D_e \cdot \text{vh}(\rho_{ee}) \\
&\quad - \Gamma \text{vh}(\rho_{ee}) \\
&\quad + \frac{1}{\hbar} \sum_m \text{Re} [i\mathcal{E}_m D_e^{-1} \cdot (A_e - S_e) \cdot I_e \otimes d_{eg}^m] \cdot v(\rho_r) \\
&\quad + \frac{1}{\hbar} \sum_m \text{Re} [\mathcal{E}_m D_e^{-1} \cdot (A_e - S_e) \cdot I_e \otimes d_{eg}^m] \cdot v(\rho_i), \\
\frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial z} &= \sum_{m' \in \text{modes}} J_{mm'} \mathcal{E}_m - 4\pi i k_m n \text{tr} (d_{ge}^m \cdot \rho_{eg}).
\end{aligned} \tag{3.63}$$

3.5.5 Виділення константних матриць

Оскільки більша частина матричних операцій у рівняннях (3.63) відбувається з константними матрицями, їх можна порухувати заздалегідь і представити систему

(3.63) у наступному вигляді:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \text{vh}(\rho_{gg}) \\ \text{vh}(\rho_{ee}) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} L_{gg} & L_{ge} \\ 0 & L_{ee} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{vh}(\rho_{gg}) \\ \text{vh}(\rho_{ee}) \end{bmatrix} \\
&+ \sum_m \text{Re} \left(\mathcal{E}_m \begin{bmatrix} Q_{mgr} & Q_{mgi} \\ Q_{mer} & Q_{mei} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} \text{v}(\rho_r) \\ \text{v}(\rho_i) \end{bmatrix}, \\
\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \text{v}(\rho_r) \\ \text{v}(\rho_i) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} L_{rr} & L_{ri} \\ L_{ir} & L_{ii} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{v}(\rho_r) \\ \text{v}(\rho_i) \end{bmatrix} \\
&+ \sum_m \text{Re} \left(\mathcal{E}_m \begin{bmatrix} Q_{mrg} & Q_{mre} \\ Q_{mig} & Q_{mie} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} \text{vh}(\rho_{gg}) \\ \text{vh}(\rho_{ee}) \end{bmatrix}, \\
\frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial z} &= \sum_{m' \in \text{modes}} J_{mm'} \mathcal{E}_{m'} - 4\pi i k_m n \text{tr} (d_{ge}^m \cdot \rho_{eg}).
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Матриці L_{\dots} та Q_{\dots} є константами:

$$L_{gg} = iD_g^{-1} \cdot (I_g \otimes \Delta_g - \Delta_g \otimes I_g) \cdot D_g - \text{dv}(\gamma), \tag{3.65}$$

$$L_{ge} = \Gamma \text{dv}(R_g) \cdot D_g^{-1} \cdot (C_{ge} \otimes C_{ge}) \cdot D_e, \tag{3.66}$$

$$L_{rr} = -\frac{\Gamma}{2} I_e \otimes I_g, \tag{3.67}$$

$$L_{ri} = -(I_e \otimes \Delta_g - \Delta_e \otimes I_g), \tag{3.68}$$

$$L_{ir} = +(I_e \otimes \Delta_g - \Delta_e \otimes I_g), \tag{3.69}$$

$$L_{ii} = -\frac{\Gamma}{2} I_e \otimes I_g, \tag{3.70}$$

$$L_{ee} = D_e^{-1} \cdot (i(I_e \otimes \Delta_e - \Delta_e \otimes I_e)) \cdot D_e - \Gamma I_e \otimes I_e, \tag{3.71}$$

$$Q_{mgr} = iD_g^{-1} \cdot (S_g - A_g) \cdot \frac{d_{ge}^m}{\hbar} \otimes I_g, \quad (3.72)$$

$$Q_{mgi} = D_g^{-1} \cdot (S_g - A_g) \cdot \frac{d_{ge}^m}{\hbar} \otimes I_g, \quad (3.73)$$

$$Q_{mrg} = -i \frac{d_{eg}^m}{2\hbar} \otimes I_g \cdot D_g, \quad (3.74)$$

$$Q_{mre} = +i I_e \otimes \frac{d_{ge}^m}{2\hbar} \cdot D_e, \quad (3.75)$$

$$Q_{mig} = -\frac{d_{eg}^m}{2\hbar} \otimes I_g \cdot D_g, \quad (3.76)$$

$$Q_{mie} = I_e \otimes \frac{d_{ge}^m}{2\hbar} \cdot D_e, \quad (3.77)$$

$$Q_{mer} = iD_e^{-1} \cdot (A_e - S_e) \cdot I_e \otimes \frac{d_{eg}^m}{\hbar}, \quad (3.78)$$

$$Q_{mei} = D_e^{-1} \cdot (A_e - S_e) \cdot I_e \otimes \frac{d_{eg}^m}{\hbar}. \quad (3.79)$$

3.6 Вибір чисельних методів

Перші два рівняння у системі (3.64) розв'язуються методом Кутта-Мерсона, опис котрого наведено, наприклад, у [183]. На кожному його кроці розв'язується третє рівняння — це можна зробити аналітично в квадратурах методом варіації константи:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m(z, t) = \mathcal{E}_m(z=0, t) - 4\pi i \sum_{m', m''} J_{mm'}(z) \times \\ \times \int_0^z n(z') J_{m'm''}(z) v(d_{ge}^{m''}) \cdot v(\rho_{eg}(z')) dz'. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Тут матриця $J(z)$ — це інтегральна матриця Джонса, що обчислюється за формулою (3.14).

Інтеграл (3.80) ми вираховуємо на кожному кроці метода Кутта-Мерсона (окремо для кожного значення t , тобто три рази на крок) за допомогою кумулятивного метода Сімпсона [184].

3.7 Висновки до розділу 3

- У цьому розділі представлено огляд чисельних досліджень із атомами складної структури, зокрема електромагнітно індуковану прозорість та властивості натрієвих опорних зірок. Далі розглянуто вимоги до чисельної моделі, серед яких важливими аспектами є врахування поляризації світла, виро-

дження за магнітним квантовим числом, подвійне заломлення в оптичних волокнах та інші.

- Основні рівняння чисельної моделі включають класичне рівняння поширення світла та рівняння часової еволюції квантового стану атомів. Для визначення повного набору умов вводяться початкові та граничні умови, а сама чисельна модель оптимізується за допомогою векторизації невідомих матриць і вираження векторизованого матричного добутку через добуток Кронекера.
- Важливим етапом оптимізації є напіввекторизація ермітових матриць, під час якої вони виражаються в дійсних числах із усуненням надлишковості. Це дозволяє покращити швидкість та ефективність чисельної моделі.
- У результаті обрано чисельні методи, які найкращим чином відповідають вимогам до моделі, забезпечуючи точність та ефективність обчислень.

Усі ці етапи визначають базові засади чисельної моделі для подальших досліджень атомів складної структури.

Розділ 4

Джерело біфотонів на основі чотирихвильової взаємодії

У цьому розділі описано експеримент зі створення джерела біфотонів на основі чотирихвильової взаємодії (FWM), який виконала група із Інституту прикладної фізики Технічного університету Дармштадта (нім. *Institut für Angewandte Physik der Technischen Universität Darmstadt*). Результати досліджень було опубліковано в статті [13] та в дисертації одного з експериментаторів [25].

4.1 Порожнисте оптичне волокно НСРСВGF

Головною складовою джерела біфотонів є порожнисте оптичне волокно з фотонним кристалом (англ. *hollow-core photonic crystal band gap fiber*, НСРСВGF). У середину цього волокна завантажуються приблизно 10^5 лазерно охолоджених атомів рубідію-87. Це створює умови для максимально сильної взаємодії світла з атомами та дозволяє досягти оптичної товщини середовища порядку 10^3 [185], що, як було зазначено в розділі 2, є ключовою умовою для створення джерела біфотонів на основі FWM.

Наразі найпоширеніші оптичні волокна складаються з суцільної серцевини з високим показником заломлення, оточеною захисною оболонкою, показник заломлення котрої є нижчим [187, section 5.6]. Профіль такого волокна зображено на рисунку 4.1 (а). Завдяки тому, що показник заломлення в серцевині є вищим за показник в оболонці, то світло, що поширюється уздовж волокна з малим кутом відхилення від його осі, утримується всередині серцевини завдяки повному внутрішньому відбиттю.

В описаних у дисертації експериментах використовується волокно з порожнистою серцевиною. На відміну від суцільних волокон, в порожнистих волокнах показник заломлення оболонки є вищим, ніж у самій серцевині, тому ефект повного

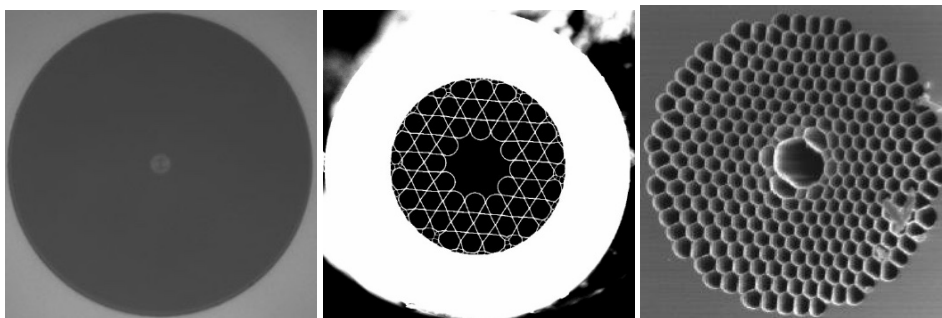


Рисунок 4.1: Профілі різних оптичних волокон, отримані методом сканувальної електронної мікроскопії: **зліва** – step-index волокна, що працює завдяки повному внутрішньому відбиттю (зображення отримане з сайту виробника https://www.thorlabs.com/newgrouppage9.cfm?objectgroup_id=6838), **посередині** – кагоме-волоконна (зображення взяте з [186]), **справа** – HCPCBGF, що використовується в описаних у дисертації експериментах (зображення отримане експериментальною групою).

внутрішнього відбиття в таких волокнах відсутній. Замість цього механізму, світло в таких волокнах утримується завдяки періодичній зміні показника заломлення в самій оболонці. Середовище із такою зміною показника називається *фотонним кристалом*.

У волокнах із фотонними кристалами та забороненою зоною (HCPCBGF) світло утримується завдяки створенню *заборонених зон* у поперечному напрямку. Це означає наявність областей, у межах яких поширення світла в певному діапазоні частот не відбувається, і це світло може поширюватися лише всередині серцевини волокна. Такі заборонені зони виникають внаслідок періодичної зміни показника заломлення навколо серцевини, що утворює фотонний кристал.

На рисунку 4.2 зображено зонну структуру одновимірного фотонного кристала та позначено заборонену зону. Ширина забороненої зони збільшується зі збільшенням різниці показників заломлення у фотонному кристалі. У волокні HCPCBGF фотонний кристал оточує порожнисту серцевину, котра має радіус більший за сталу кристалічної ґратки. Через це світло, частота котрого знаходиться в забороненій зоні, може поширюватися тільки в серцевині — поза її межами поле експоненційно спадає.

В експерименті використовується волокно HCPCBGF NKT Photonics, HC-800-02 довжиною 12 см із діаметром серцевини 7 μm [128, 185]. Волокно здатне утримувати світло з довжиною хвилі від 770 нм до 870 нм [185], що покриває лінії D_1 і D_2 рубідію-87. Профіль волокна зображено на рисунку 4.1 (с).

Поширеною альтернативою до HCPCBGF є волокна з так званою кагоме-ґраткою (рисунку 4.1 (b)), названою на честь традиційного японського візерунка плетіння бамбуку (яп. 籠目, RJ /kagome/). Механізм утримання світла всередині кагоме-волоконна має назву «пригнічена взаємодія» (англ. *inhibited coupling*), що є ана-

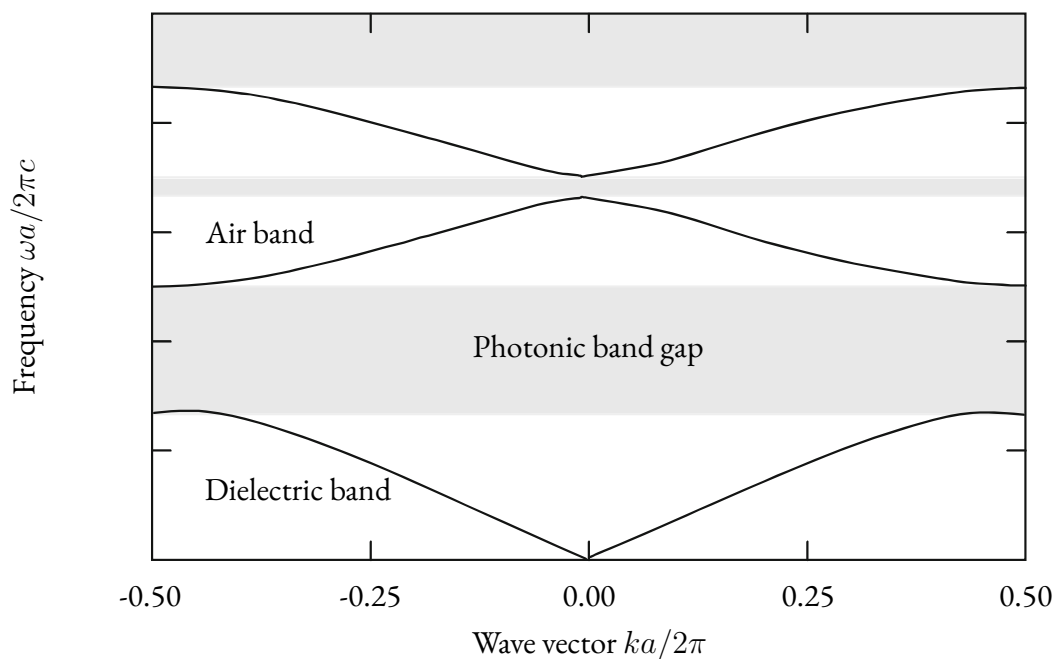


Рисунок 4.2: Схематичний графік закону дисперсії для одновимірного фотонного кристала з позначенням заборонених зон. Рисунок узято з [188].

логом так званих пов'язаних станів у неперервному спектрі (*англ. bound states in continuum*) [189]. Ці стани є локалізованими в просторі, але їхні частоти належать до неперервної частини спектра. Так само і в кагоме-волокні існують локалізовані в його ядрі моди, які незважаючи на співпадіння частот, не взаємодіють із модами оболонки через несумісність симетрії [190]. Кагоме-волокна мають більший діаметр серцевини (кілька десятків мікронів), що полегшує завантаження атомів, а також мають менші коефіцієнти подвійного заломлення. Однак саме через більший діаметр серцевини кагоме-волокна не дозволяють спостерігати таку велику оптичну товщину (і, відповідно, взаємодію світла з речовиною), як **HCPCBGF**.

4.2 Рубідій-87 та надтонка структура його D-лінії

В експерименті використовуються атоми рубідію. Рубідій є лужним металом, він має один електрон на валентній оболонці, тому його можна вважати воднеподібним атомом.

Оскільки ми надалі матимемо справу з надтонкою структурою D-лінії рубідію, варто звернути увагу на склад його ядра. У природі існують два ізотопи рубідію: стабільний рубідій-85 (72.165%) та бета-радіоактивний рубідій-87 (27.835%) [191]. Останній, хоч і є радіоактивним, але має період напіврозпаду майже 50 мільярдів

років [192] — більш як утричі більший за вік Усесвіту. В експерименті використовується саме рубідій-87, і далі йтиметься саме про цей ізотоп. Якщо не зазначено інакше, подальшу інформацію в цьому розділі отримано зі [180].

D-лінія рубідію-87 складається з двох переходів: $5^2S_{1/2} \rightarrow 5^2P_{1/2}$ (D₁-лінія) і $5^2S_{1/2} \rightarrow 5^2P_{3/2}$ (D₂-лінія). Ці переходи є складовими дублету тонкої структури, і кожен із них має свою надтонку структуру.

Тонка структура є результатом взаємодії орбітального магнітного моменту \vec{L} зі спіном валентного електрона \vec{S} , і повний магнітний момент електрона $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$. Відповідне квантове число J , яке визначає його величину в одиницях \hbar (тобто $|\vec{J}| = \sqrt{J(J+1)}\hbar$), має знаходитись у діапазоні від $|L - S|$ до $L + S$.

Для основного стану рубідію-87 маємо $L = 0$, $S = 1/2$, тому $J = 1/2$, що відповідає терму $5^2S_{1/2}$. Для першого збудженого стану $L = 1$, тому $J \in \{1/2, 3/2\}$, що відповідає термам $5^2P_{1/2}$ і $5^2P_{3/2}$. Через те, що тонка структура збудженого стану складається з двох підрівнів, D-лінія розпадається на дві лінії D₁ і D₂.

Надтонка структура утворюється внаслідок взаємодії повного магнітного моменту електрона \vec{J} з магнітним моментом ядра \vec{I} . Аналогічно до повного моменту електрона \vec{J} , повний магнітний момент атома $\vec{F} = \vec{J} + \vec{I}$, а відповідне квантове число F знаходиться у діапазоні від $|J - I|$ до $J + I$. Оскільки магнітний момент ядра рубідію-87 $I = 3/2$, то для $5^2S_{1/2}$ та $5^2P_{1/2}$ маємо $F \in \{1, 2\}$, а для $5^2P_{3/2}$ маємо $F \in \{1, 2, 3, 4\}$. Кожен із рівнів надтонкої структури є виродженим і має $2F + 1$ магнітних підрівнів.

Рівні надтонкої структури рубідію-87 та частоти переходів між ними зображено на рисунку 4.3. Варто зазначити, що для переходів між рівнями надтонкої структури діє правило відбору $\Delta F \in \{-1, 0, 1\}$ [193, section 20.5], тому переходи $F=1 \rightarrow F'=3$ та $F=2 \rightarrow F'=0$ лінії D₂ є дипольно забороненими.

4.3 Завантаження атомів усередину волокна

Утримання атомів у порожнистих оптичних волокнах було вперше запропоновано тридцять років тому [194] і реалізовано експериментально як із «гарячими» [195], так і з лазерно охолодженими атомами [196, 197]. Такі експерименти дозволяють утримувати як атоми, так і світло в об'ємі макроскопічної довжини при площі перерізу від кількох десятків квадратних мікрон, і таким чином досягати сильної взаємодії між світлом та речовиною. Альтернативними методами є використання високодобротних мікрорезонаторів [198] і магнітно-оптичних пасток [199]. У перших експериментах використовувалися порожнисті скляні капіляри, що призводило до відносно великих втрат [195, 200, 201], а подальші роботи використовували одномодові волокна з фотонними кристалами — як **HCPCBGF** [202], так і волокна з кагоме-граткою [203, 204].

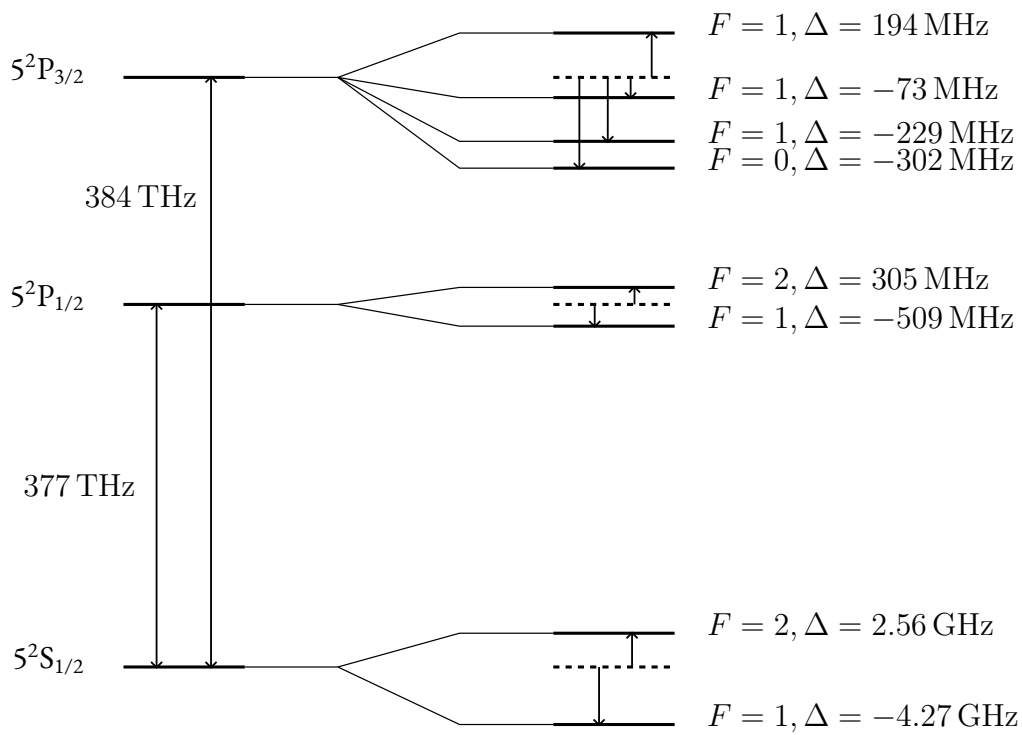


Рисунок 4.3: Рівні надтонкої структури рубідію-87 та їхні відстройки Δ відносно відповідних рівнів тонкої структури. Числові значення частот переходів дублету та відстроек Δ отримано зі [180].

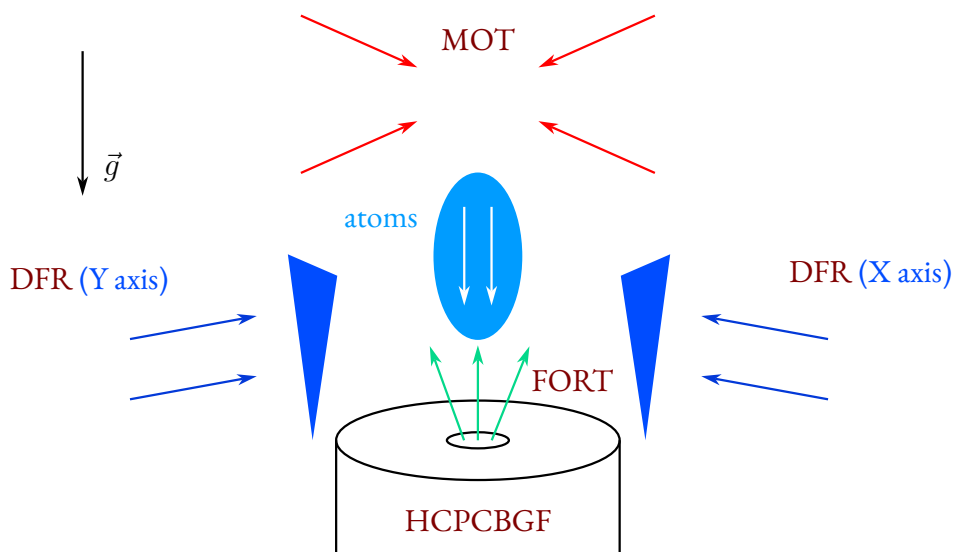


Рисунок 4.4: Схема завантаження атомів рубідію-87 усередину HCPCBGF.

Процедуру завантаження атомів у волокно, що використовується в нашому експерименті, зображено на рисунку 4.4. Експериментальна група опублікувала цю процедуру в статтях [128, 185] та в PhD-дисертації експериментатора Александра Брунса (Alexander Bruns) [25], а тут ми опишемо її більш коротко.

Опишемо коротко процедуру завантаження атомів у волокно, що використовується в експерименті (процес зображено на рисунку 4.4). Детально ця процедура описана в експериментальних роботах [25, 128, 185].

Спочатку атоми рубідію, лазерно охолоджені до температури порядку 100 мК, накопичуються в магніто-оптичній пастці (англ. *magneto-optical trap*, MOT). За час в одну секунду в MOT накопичується порядку 10^7 атомів. Атоми накопичуються в точці 5.5 mm над верхнім кінцем волокна, яке розташоване вертикально. Потім, шляхом зміни магнітного поля, атоми переміщуються ближче до волокна. Оскільки згусток атомів має діаметр порядку 1 mm, то щоб цей згусток пройшов усередину серцевини волокна, котра має діаметр 7 μm , використовується так званий *dark funnel repumper* (DFR): біля входу у волокно створюється трикутна тінь, завдяки якій ті атоми, що вже знаходяться біля центральної осі, лишаються в центрі і не отримують додаткової кінетичної енергії від лазерів перекачки (англ. *repumper*). Для стиснення згустка атомів за двома осями використовуються два ортогональних DFRs. Таким чином, згусток атомів стискається в поперечному напрямку і скеровується до входу у волокно, де потрапляє у так звану далеко відстроєну пастку (англ. *far-off resonant trap*, FORT) [205]. Її створює лазер, який світить знизу вгору через волокно. Крім того, що FORT затягує атоми всередину волокна (у волокну таким чином опиняється до 2.1×10^5 атомів, тобто 2.1% від початкової кількості атомів у MOT [128]), вона також у

самому волокну утримує атоми від зіткнення з його стінками, що мають кімнатну температуру. Перед початком експерименту **FORT** вимикається, після чого на експеримент є близько $5 \mu\text{s}$, поки атоми не досягнуть стінок волокна. Після його закінчення **FORT** знову вмикається, збираючи атоми в центрі волокна, тому для повторного експеримента перезавантажувати атоми у волокно не потрібно — достатньо перевести їх у відповідний початковий квантовий стан.

Пастку **FORT** в експерименті створюють два ортогонально (лінійно) поляризовані промені від лазерних діодів Thorlabs L820P200. Інші лазери, які використовуються в експериментах — це діодні лазери з зовнішнім резонатором (англ. *external cavity diode laser*, **ECDL**), зібрані з використанням лазерних діодів (Thorlabs L785P090 або L785H1) та дифракційних ґраток Torptica GH13-18V. Експеримент виконується в ультрависоковакуумній камері (Japan Cell, $70 \text{ mm} \times 25 \text{ mm} \times 25 \text{ mm}$) за вакууму, що становить приблизно 10^{-9} mbar .

4.4 Принцип роботи джерела біфотонів на основі **FWM**

Отже, основною складовою джерела біфотонів, описаного в цьому розділі, є лазерно охолоджені атоми рубідію-87, завантажені всередину порожнистого оптичного волокна **HCPCBGF**. Хоча **FWM** і є нелінійним ефектом, але наш експеримент зручніше пояснити в контексті квантової оптики. Він працює за подвійною лямбда-схемою, зображеною на рисунку 4.5. Вона складається з двох лямбда-подібних схем $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ та $|1\rangle \leftrightarrow |4\rangle \leftrightarrow |2\rangle$.

На початку експерименту всі атоми знаходяться на рівні $|1\rangle$. Один із атомів поглинає фотон із поля накачки ω_p і переходить на рівень $|4\rangle$, з якого спонтанно випромінює фотон у моду ω_S і переходить на рівень $|2\rangle$. Оскільки на квантовому рівні невідомо, який саме атом розсіяв фотон, тому система всіх атомів переходить у стан делокалізованої спінової хвилі, в якій усі атоми є квантово сплутаними:

$$\psi_{\text{spin wave}} = |\rightsquigarrow\rangle_S \otimes |\emptyset\rangle_{AS} \otimes \sum_{a \in \text{atoms}} |2\rangle_a \otimes |1\rangle_{\text{others}} \exp \left[i \left(\vec{k}_p - \vec{k}_S \right) \cdot \vec{r}_a \right]. \quad (4.1)$$

Тут враховано наявність одного фотона у стоксовій моді.

Варто зазначити, що оскільки поле накачки є далеко відстроєним від переходу $|1\rangle \leftrightarrow |4\rangle$ ($\Delta = 53\Gamma_{D_2}$), ймовірність розсіяння одночасно кількох фотонів є малою.

Контрольне поле ω_c , навпаки, налаштоване резонансно на перехід $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$. Тому воно з великою ймовірністю розсіюється на спіновій хвилі (4.1). В результаті всі атоми знову опиняються на рівні $|1\rangle$, але в результаті також утворюється фотон в антистоксовій моді, що є квантово сплутаним зі стоксовим фотоном:

$$\psi_{\text{biphoton}} = |\rightsquigarrow\rangle_S \otimes |\rightsquigarrow\rangle_{AS} \otimes |1\rangle_{\text{all atoms}}. \quad (4.2)$$

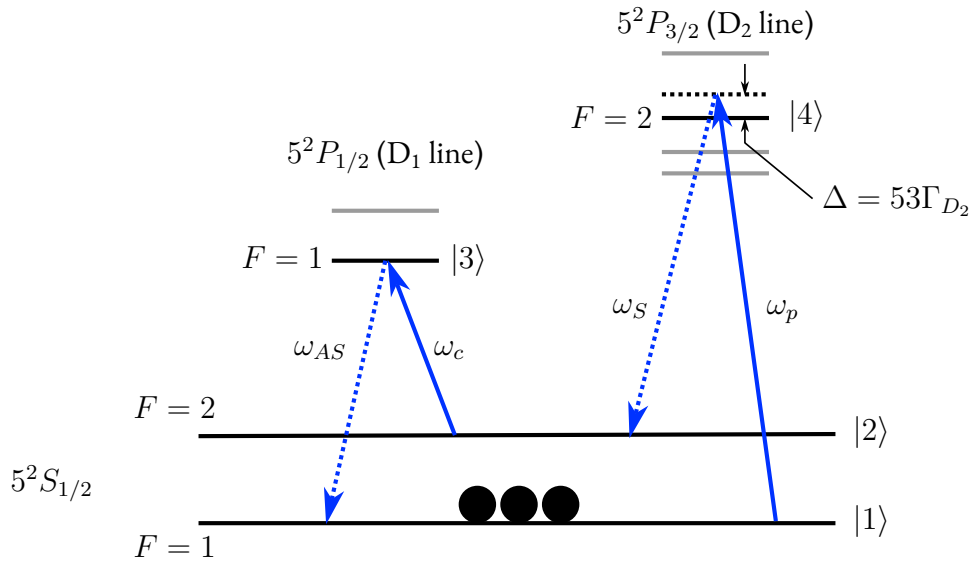


Рисунок 4.5: Схема рівнів експерименту FWM на атомах рубідію-87.

Таким чином, експеримент із FWM представляє собою DLCZ, у якому запис та зчитування відбуваються одночасно. Так само як і в DLCZ, чотири поля пов'язані між собою умовами синхронізму (англ. *phase-matching conditions*):

$$\omega_p - \omega_S + \omega_c - \omega_{AS} = 0, \quad (4.3)$$

$$\vec{k}_p - \vec{k}_S + \vec{k}_c - \vec{k}_{AS} = 0. \quad (4.4)$$

4.5 Розділення мод

У вільному просторі саме умови синхронізму (4.3) та (4.4) дозволяють розрізнити різні моди поля за напрямком. Це є перевагою джерел на основі SPDC та FWM над каскадними, де фотони випромінюються у випадкових напрямках (їх розділюють за частотою), і тому каскадні джерела потребують спеціальної оптики, що охоплює майже повний тілесний кут.

Усередині ж оптичного волокна розрізнити окремі моди, в тому числі сильні накачки та контрольну моду від однофотонних стоксової та антистоксової мод, неможливо. Розділити різні поля можна або за частотою, або за поляризацією. За частотою, як уже було сказано в розділі 3.2, розділити поля експериментально складно, тому існує потреба теоретично визначити такі поляризації сильних полів, щоб однофотонні були поляризовані ортогонально до них.

За допомогою описаної в розділі 3 чисельної моделі було визначено залежність поляризацій стоксового та антистоксового поля від поляризацій накачки та контрольного поля. Цю залежність зображено на рисунку 4.6. Було вста-

новлено, що якщо контрольне поле поляризоване ортогонально до накачки, то стоксове поле буде поляризоване також ортогонально до накачки, а антистоксове — ортогонально до контрольного. Таким чином, за частотою достатньо відокремити лінію D_1 від D_2 , а близькі за частотою поля можна просто розділити за допомогою **PBS**.

Квантові флуктуації імітуються за допомогою випадкового початкового стоксового поля:

$$\begin{aligned} E_{S\pm}(z=0, t=0) &= 0, \\ E_{S\pm}(z=0, t + \delta t) &= E_{S\pm}(z=0, t) e^{-\frac{\Gamma_{D_2}}{2}\delta t} + \nu_{\pm}(t) E_{\text{vac}} \sqrt{1 - e^{-\Gamma_{D_2}\delta t}}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

де $\delta t \ll 1/\Gamma$ — крок чисельного алгоритма, $\nu_{\pm}(t)$ — випадкова величина з нормалізованого комплексного гаусового розподілу, а E_{vac} — константне поле, що відповідає частоті Рабі $\sim 1 \times 10^{-5}\Gamma$. Індеси \pm та залежність $\nu(t)$ від часу вказує, що $\nu(t)$ обирається на кожному кроці та для кожної поляризації σ_{\pm} випадково і незалежно.

4.6 Схема експерименту

Схему експерименту зображено на рисунку 4.7. Спочатку атоми завантажуються у волокно, де утримуються за допомогою **FORT** — цей процес описано в розділі 4.3. Одночасно з цим атоми готуються в стані $|1\rangle$ за допомогою резонансної перекачки на переході $|2\rangle \leftrightarrow |4\rangle$, як показано на рисунку 4.5. Процес **FWM** триває 4 ns, на цей час **FORT** вимикається. Цей процес повторюється 3500 разів без перезавантаження атомів у волокно.

Ортогонально поляризовані за допомогою **PBS** контрольне поле та поле накачки проходять через волокно **HCPCBGF**, генеруючи під час взаємодії з атомами рубідію однофотонні стоксове та антистоксове поля. Усі чотири поля проходять через другий **PBS**, котрий пропускає накачку та антистоксове поле, а контрольне і стоксове — відбиває.

Після розділення сильні контрольне поле та поле накачки відфільтровуються за частотою в два етапи: спочатку через температурно-налаштовані монолітні еталони [206, 207], а потім за допомогою вузькосмугових оптичних фільтрів із $OD > 4$. Однофотонні же стоксове та антистоксове поля детектуються за допомогою установок **HBT**, що складаються зі світлоділителей на основі оптичних волокон та **SPCM** Excelias SPCM-AQRH-13-FC, чий покази обробляються електронікою для відліку часу (*англ. time-tagging electronics*) Swabian Instruments Timetagger 20. Перемноживши коефіцієнти пропускання всіх елементів системи після **HCPCBGF** (оптика — 50%, еталони — 30%, волоконний світлоділитель — 90%, з'єднання волокон із **SPCM** — 95%) на внутрішню квантову ефективність **SPCM** 63%, отримуємо повну ефективність детектування фотонів у 8%.

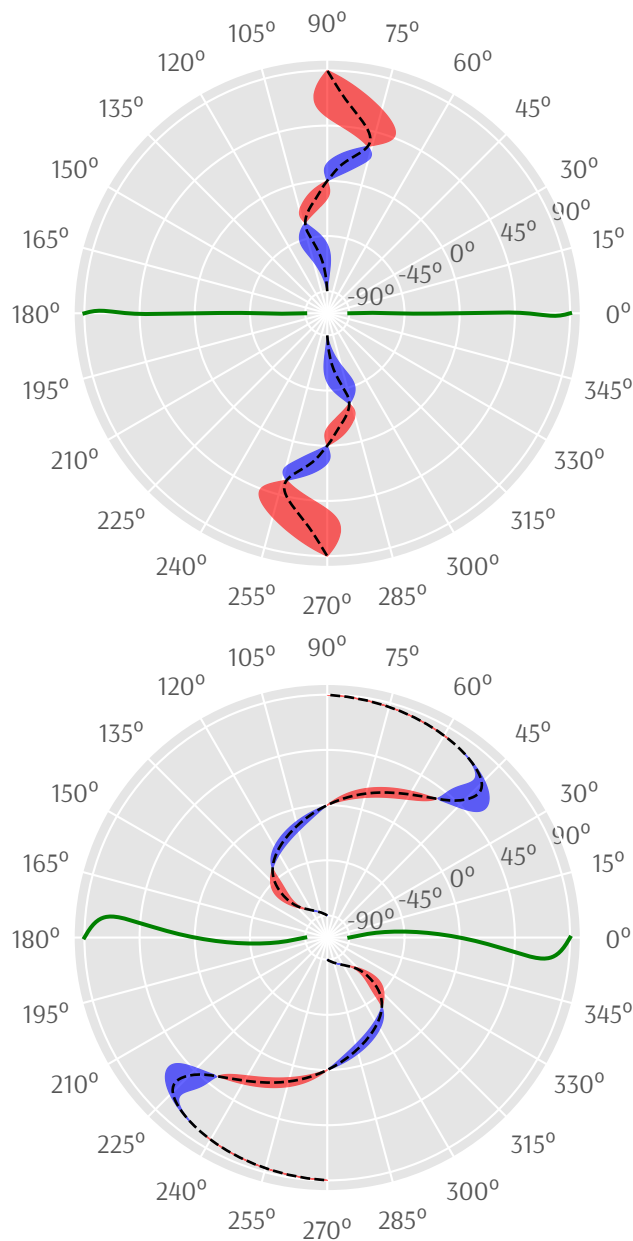


Рисунок 4.6: Чисельно обрхована залежність поляризації в кінці волокна поля накачки та стоксового поля (**верхній графік**), а також контрольного та антистоксового полів (**нижній графік**), від кута між полем накачки та контрольним полем (**радіальна координата** на обох графіках). **Зелені лінії** на обох графіках відповідають сильним полям (їхні поляризації є майже лінійними), а **пунктирні лінії та синьо-червоні області навколо них** – слабким. Позначення для нахилу та еліптичності поляризації слабких полів такі само, що і на рисунку 3.9. Кут нахилу поляризації на кожному графіку позначено відносно нахилу поляризації відповідного сильного поля на початку волокна.

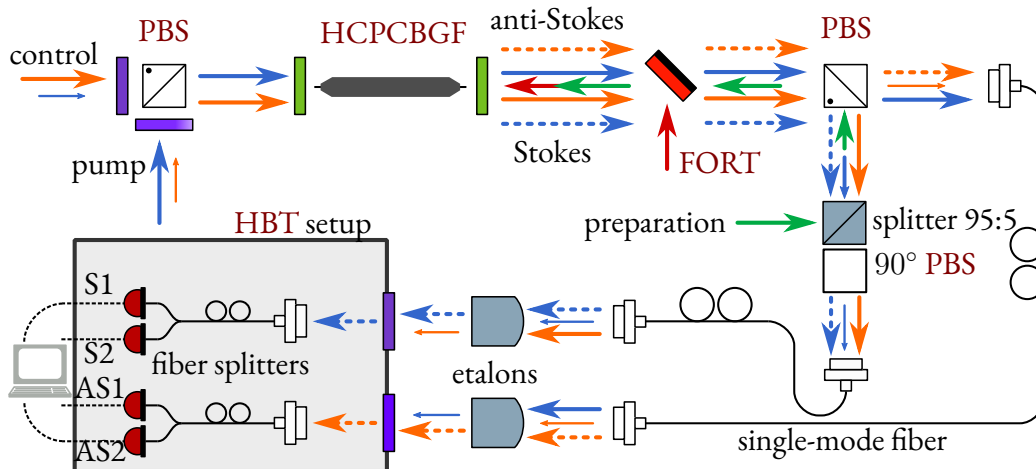


Рисунок 4.7: Схема експерименту FWM.

4.7 Кореляційні характеристики випромінених біфотонів

Розглянемо тепер результати експериментальних досліджень. Розпочнемо з аналізу властивостей біфотонів за постійних експериментальних умов, за яких досягається висока генерована спектральна яскравість на одиницю потужності накачки (англ. *generated spectral brightness per pump power*, GSBP) на рівні 300 pairs/(s × MHz × nW). Цей результат порівняний із рекордними показниками [208].

На рисунку 4.8 (а) зображено залежність крос-кореляції $g_{S,AS}^{(2)}$ від затримки між моментами детектування фотона в стоксовій та антистоксовій модах. Ми отримали цю крос-кореляцію, нормуючи на фон випадкових співпадінь. Цей фон визначено шляхом порівняння різних експериментів, що дозволило усунути «фізично обґрунтовані» кореляції. Видно, що для затримок до 75 ps крос-кореляція істотно перевищує межу для класичного світла, що визначається як $g_{S,AS}^{(2)}(\tau) = 2$. Затухаючі коливання на графіку свідчать про те, що ми перебуваємо в перехідному режимі між затухаючими осциляціями Рабі та режимом групової затримки [209, 210]. Порушення нерівності Коші-Буняковського-Шварца (2.9) досягає $\mathcal{R} = 97(24)$, що перевищує класичний ліміт $\mathcal{R} \leq 1$ на чотири стандартні похибки. Важливо відзначити, що самі по собі стоксове та антистоксове поле відображають теплову статистику, оскільки їхні автокореляції $g_{S,S}^{(2)} = g_{AS,AS}^{(2)} \approx 2$, що було визначено експериментально.

Щоб розрахувати спектральну ширину отриманих біфотонів, ми розрахуємо

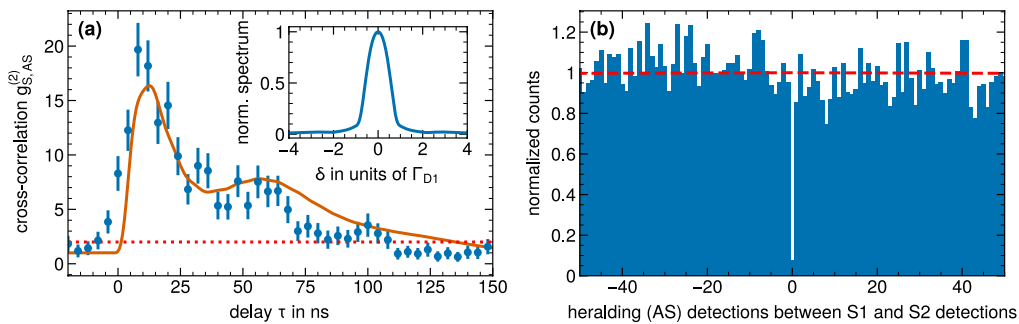


Рисунок 4.8: **(a)** Крос-кореляція $g_{S,AS}^{(2)}(\tau)$ залежно від затримки τ між детектуванням фотона в антистоксовій моді відносно стоксової. **Червона пунктирна лінія** вказує на верхню межу класичного режиму $g_{S,AS}^{(2)} = 2$. Потужність поля накачки 14 nW , контрольного поля 17 nW , що відповідає частотам Рабі $\Omega_p = 3.1\Gamma_{D_1}$ та $\Omega_c = 2.8\Gamma_{D_1}$. Оптична товщина середовища $40 \geq OD \geq 80$ (ми включаємо діапазон значень для того, щоб мати гарну статистику). Інтервал дискретизації експериментальних даних (англ. *bin size*) становить 4 ns . Теоретичну криву (**помаранчева суцільна лінія**) обчислено за формулою (4.6) з параметрами $OD = 15$, $\Omega_c = 2.8\Gamma_{D_1}$, $P = 14 \text{ nW}$ і масштабовано вертикально до експериментальних точок. До теоретичної кривої додано одиницю, щоб урахувати нескорельований фон. У **врізці** показано нормалізований спектр біфотона, обчислений із теоретичної кривої. **(b)** Автокореляція $g_{S,S|AS}^{(2)}$ стоксової моди за умови детектування фотона в антистоксовій моді, нормалізована так, що середнє значення ненульових стовпчиків (**червона пунктирна лінія**) дорівнює одиниці. Набір даних той самий, що і в (a). Детальніше про спосіб розрахунку в основному тексті.

квадрат модуля хвильової функції [209]

$$|\psi(\tau)|^2 = \left| \frac{L}{2\pi} \int \kappa(\delta) \Phi(\delta) e^{-i\delta\tau} d\delta \right|^2, \quad (4.6)$$

із функцією повздожньої відстройки

$$\Phi(\delta) = \text{sinc} \left(\frac{\Delta k L}{2} \right) \exp \left(i \frac{(k_{AS} + k_S) L}{2} \right), \quad (4.7)$$

та нелінійним параметричним коефіцієнтом взаємодії

$$\kappa(\delta) = -i \frac{\sqrt{\omega_{AS} \omega_S}}{2c} \chi^{(3)}(\delta) E_p E_c, \quad (4.8)$$

де E_p та E_c — відповідно поле накачки та контрольне поле, а $\delta = \omega - \omega_{AS}$ — однофотонна відстройка антистоксового поля. Кубічна діелектрична сприйнятливість для антистоксового фотона має такий вигляд:

$$\chi^{(3)}(\delta) = \frac{nd_{13}d_{32}d_{24}d_{41}/(\epsilon_0\hbar^3)}{(\Delta + i\Gamma_{D_2}/2) [|\Omega_c|^2 - 4(\delta + i\Gamma_{D_1})(\delta + i\gamma_{12})]}, \quad (4.9)$$

де d_{ij} — матричні елементи дипольного моменту на відповідних переходах, n — середня концентрація атомів, а Ω_c — частота Рабі контрольного поля.

Для обчислення $\Phi(\delta)$ визначимо комплексні хвильові числа полів як $k_i(\delta) = \frac{\omega_i}{c} \sqrt{1 + \chi_i(\delta)}$, використовуючи лінійні сприйнятливості

$$\chi_S(\delta) = \frac{n |d_{24}|^2 (\delta - i\Gamma_{D_1}/2)/(\epsilon_0\hbar)}{|\Omega_c|^2 - 4(\delta - i\Gamma_{D_1}/2)(\delta - i\gamma_{12})} \times \frac{|\Omega_p|^2}{\Delta^2 + (\Gamma_{D_2}/2)^2}, \quad (4.10)$$

$$\chi_{AS}(\delta) = \frac{4n |d_{13}|^2 (\delta + i\gamma_{12}/2)/(\epsilon_0\hbar)}{|\Omega_c|^2 - 4(\delta + i\Gamma_{D_1}/2)(\delta + i\gamma_{12})}, \quad (4.11)$$

де Ω_p — частота Рабі поля накачки.

На рисунку 4.8 (а) представлено форму хвилі, яку ми обчислили за формулою (4.6), підлаштовуючи параметри під експериментальні дані. Важливо відзначити, що параметри теоретичної кривої не повністю співпадають із експериментальними, оскільки наш експеримент відрізняється від описаного в [209]. Зокрема, у нашому експерименті концентрація атомів та інтенсивність поля накачки та контрольного поля змінюються вздовж волокна. Крім того, в нашому експерименті кожен «рівень» теоретичної схеми відповідає кільком магнітним підрівням. З отриманої теоретичної кривої обчислено спектр антистоксової моди, показаний на рисунку 4.8 (а) у врізці. Ширина на рівні половини максимуму (англ. *full width*

at *half-maximum*, FWHM) складає $2\pi \times 6.5 \text{ MHz} \approx 1.1\Gamma_{D_1}$. Це значення відповідає результатам попередніх експериментів з рубідієм [96, 211]. Таким чином, характерна тривалість біфотона складає приблизно 24 ns.

Інтерпретуючи джерело біфотонів як імовірнісне джерело одиночних фотонів, ми для сповіщення (англ. *beralding*) про створення фотона використовуватимемо не стоксову моду, як це зазвичай робиться для FWM, а антистоксову. Ми обрали антистоксову моду тому, що в нашому експерименті не можна нехтувати раманівською генерацією, що є істотною саме для стоксового поля, адже поле накачки взаємодіє з населеним рівнем $|1\rangle$. Тому, обираючи антистоксове поле для сповіщення про створення фотонів у стоксовому полі, ми уникаємо впливу раманівського розсіювання на сповіщення. Такий вибір може виглядати контрінтуїтивним, адже в антистоксовій моді маємо затримку завдяки ефекту повільного світла (англ. *slow light effect*), пов'язаному з EIT [106]. Тим не менше, проблем ця затримка не створює, адже її можна компенсувати за допомогою оптичної лінії затримки.

Цей вибір обґрунтований тим, що в нашому експерименті необхідно враховувати раманівську генерацію, яка суттєво впливає саме на стоксове поле через взаємодію поля накачки з населеним рівнем $|1\rangle$. Обираючи антистоксове поле для сповіщення про створення фотонів у стоксовому полі, ми уникаємо впливу раманівського розсіювання на сповіщення. Такий вибір може виглядати контрінтуїтивним, адже в антистоксовій моді спостерігається затримка, пов'язана з ефектом повільного світла (англ. *slow light effect*), викликаного EIT [106]. Однак ця затримка не становить проблему, оскільки її можна компенсувати за допомогою оптичної лінії затримки.

На рисунку 4.8 (b) зображено автокореляцію $g_{S,S|AS}^{(2)}$ стоксового поля за умови детектування фотона в антистоксовій моді. Щоб отримати дані достатньої якості, не витрачаючи багато часу, ми використали метод, заснований на [212, 213] та показаний на рисунку 4.9. Ми обрали вікно тривалістю 24 ns, відповідно до тривалості біфотона. Будь-який сповіщений S1 чи S2 фотон, тобто такий, разом із котрим протягом тривалості вікна було задетектовано фотон в антистоксовому полі, запускає підрахунок. Далі, для кожної пари з S1 та S2 фотона ми рахуємо кількість n антистоксових фотонів між S1 та S2 фотоном і додаємо одиницю або до n -того стовпчика гістограми 4.8 (b), якщо S1 зареєстрував фотон першим, або до $(-n)$ -того, якщо S2 зареєстрував фотон першим. Для даних із рисунка 4.9 маємо 1 у нульовому, першому та четвертому стовпчиках і 3 в другому. Нульовий стовпчик у гістограмі відповідає тому, що один і той самий фотон в антистоксовій моді сповіщає про більш як один фотон у стоксовій моді, що протирічить однофотонності полів. Ми визначаємо параметр антикореляції $g_{S,S|AS}^{(2)}$ як висоту нульового стовпчика, нормалізованого на середню висоту всіх інших стовпчиків [212]. Таким чином, ми отримуємо $g_{S,S|AS}^{(2)} = 0.08(1)$, що порушує класичну межу $g_{S,S|AS}^{(2)} \geq 1$ [26], а також підтверджує ненульову проекцію на однофотонний фоківський стан

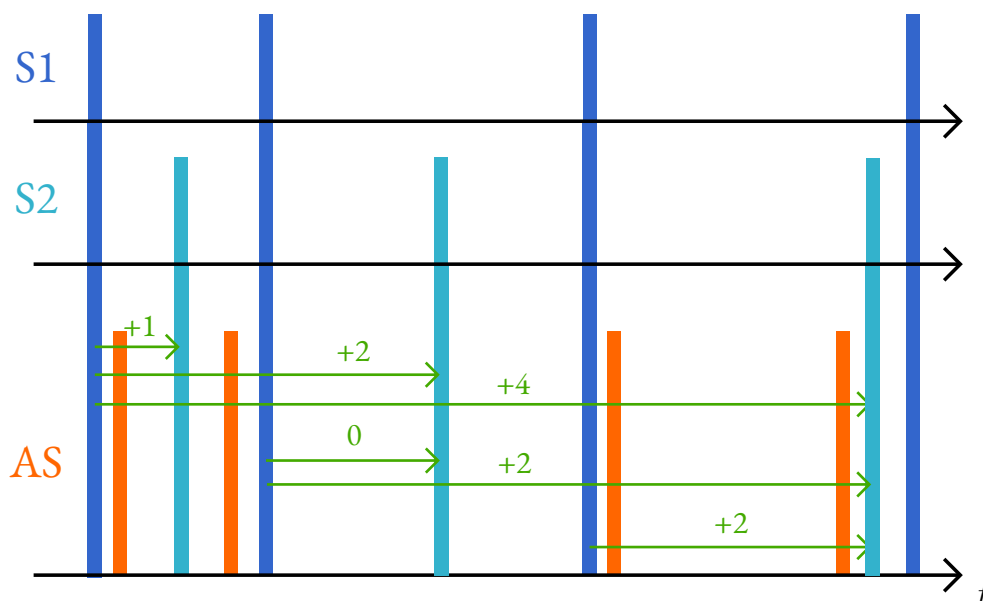


Рисунок 4.9: Схема обчислення антикореляції (англ. *anti-bunching*) для малих кількостей задетектованих фотонів. Для кожної пари детектувань S1-S2 ми визначаємо кількість n антистоксових фотонів, задетектованих у проміжку часу між S1 та S2 (позначену **зеленим кольором**), і додаємо одиницю до n -тої смуги гістограми на рисунку 4.8 (b). Для спрощення рисунка від'ємні n на ньому не зображено.

[214].

Ефективність сповіщення (англ. *heralding efficiency*), розрахована як співвідношення між кількістю пар фотонів та кількістю антистоксових фотонів із поправкою на втрати під час передачі, становить 43%. Таку високу ефективність отримано завдяки оптимальному узгодженню мод усередині **HCPCBGF**. Схожі результати отримано і в нановолокнах [211].

4.8 Теоретична модель крос-кореляції біфотонів

Опишемо просту теоретичну модель для крос-кореляції [215], яка враховує втрати та неефективність детектора. Ця модель розроблена Енно Гізе (нім. *Enno Giese*) з Інституту прикладної фізики Технічного університету Дармштадта (нім. *Institut für Angewandte Physik der Technischen Universität Darmstadt*). Введемо бозонний оператор знищення

$$\hat{b}_j = t_j \hat{a}_j + r_j \hat{\mu}_j, \quad (4.12)$$

для фотонів у модах $j = S, AS$. Тут \hat{a}_j відповідає за корисний сигнал, тобто ті фотони, що їх було створено під час **FWM**, а $\hat{\mu}_j$ відповідає за фоновий шум. Неідеальне детектування відображено у формулі (4.12) через перетворення світлоділи-

теля $T_j + R_j = |t_j|^2 + |r_j|^2 = 1$. Таким чином, T_j — ефективність детектора, що враховує всі втрати в моді j .

Якщо ми припускаємо, що сигнал і шум не є скорельованими $\langle \hat{a}_j^+ \hat{\mu}_j \rangle = 0$, ми можемо пов'язати кількість задетектованих фотонів $N_j = T_j n_j + \mathcal{N}_j$ із кількостями створених стоксових та антистоксових фотонів $n_j = \langle \hat{a}_j^+ \hat{a}_j \rangle$. Тут ми ввели кількість «шумових» фотонів $\mathcal{N}_j = R_j \langle \hat{\mu}_j^+ \hat{\mu}_j \rangle$.

Таким чином, крос-кореляція для задетектованих фотонів

$$g_{S,AS}^{(2)} = \frac{\langle \hat{b}_S^+ \hat{b}_{AS}^+ \hat{b}_S \hat{b}_{AS} \rangle}{N_S N_{AS}}, \quad (4.13)$$

має такий вигляд:

$$g_{S,AS}^{(2)} = \frac{\langle \hat{a}_S^+ \hat{a}_{AS}^+ \hat{a}_S \hat{a}_{AS} \rangle}{n_S n_{AS}} \cdot \frac{T_S n_S T_{AS} n_{AS}}{N_S N_{AS}} + \frac{\mathcal{N}_S \mathcal{N}_{AS}}{N_S N_{AS}}. \quad (4.14)$$

Тут вважається, що сигнал і шум не є скорельованими:

$$\langle \hat{a}_S^+ \hat{a}_{AS}^+ \hat{\mu}_S \hat{\mu}_{AS} \rangle = 0, \quad (4.15)$$

а також що шуми в двох модах так само не є скорельованими:

$$R_S R_{AS} \langle \hat{\mu}_S^+ \hat{\mu}_{AS}^+ \hat{\mu}_S \hat{\mu}_{AS} \rangle = \mathcal{N}_S \mathcal{N}_{AS}. \quad (4.16)$$

Для ідеально скорельованих «сигнальних» фотонів, їхня кількість у стоксовій та антистоксовій моді мають співпадати: $n_S = N_{AS} = n$. Оскільки, як було показано в основному розділі 4, обидва поля мають теплову статистику, то

$$\frac{\langle \hat{a}_S^+ \hat{a}_{AS}^+ \hat{a}_S \hat{a}_{AS} \rangle}{n_S n_{AS}} = 2 + \frac{1}{n}, \quad (4.17)$$

для ідеально скорельованих полів. Крос-кореляція з урахуванням шуму тоді має вигляд

$$g_{S,AS}^{(2)} = \frac{2 + \frac{1}{n} + \frac{\mathcal{N}_S \mathcal{N}_{AS}}{T_S T_{AS} n^2}}{\left[1 + \frac{\mathcal{N}_S}{T_S n}\right] \left[1 + \frac{\mathcal{N}_{AS}}{T_{AS} n}\right]}. \quad (4.18)$$

Якщо шум є малим у порівнянні з сигналом, то формула (4.18) спрощується до (4.17). Якщо, навпаки, шум є великим, то маємо $g_{S,AS}^{(2)} \rightarrow 1 + 1/(n + \mathcal{N})$. Зазначимо, що для багатомодової моделі число 2 потрібно замінити на $1 + 1/M$, де M — кількість детектованих мод [216].

Щоб визначити рівень шуму для теоретичних кривих у розділі 4, ми припускаємо $N_j = [r_j^0 + r_j^0(P) + r_j(P)]\tau_c$, де r_j^0 — шум за відсутності атомів та поля

накачки (від фонового світла, залишкового контрольного світла та хибних детектувань **SPCM**), $r_j^0(P)$ — додатковий шум від поля накачки за відсутності атомів. Останній член $r_j(P)$ — це вклад атомів, зумовлений раманівським шумом та залишковим оптичним накачуванням, і надалі ми цим членом нехтуватимемо. Чисельні значення шумів було виміряно як $r_S^0 = 2800/\text{s}$, $r_{AS}^0 = 1200/\text{s}$, $r_S^0(P) = 84/(\text{s nW}) \cdot P$, $r_{AS}^0(P) = 7.6/(\text{s nW}) \cdot P$. Характерний час τ_c ми оцінюємо як величину одного порядку з тривалістю біфотона, отриманою з рисунка 4.8: $\tau_c \sim 24 \text{ ps}$. Ефективності детектування, як було зазначено раніше, ми обчислюємо як $T_S = T_{AS} = 0.08$.

4.9 Вплив потужності накачки на характеристики джерела біфотонів

У даному підрозділі розглядається залежність характеристик джерела біфотонів від потужності накачки P . На рисунку 4.10 представлено максимальну крос-кореляцію $g_{S,AS}^{(2)}$ та згенеровану спектральну яскравість (англ. *generated spectral brightness*, **GSB**) у залежності від P . Видно, що зі збільшенням потужності накачки крос-кореляція, що відображає чистоту фотонних пар, зменшується пропорційно $1/P$. Проте, незважаючи на це зменшення, ми спостерігаємо неklasичні кореляції протягом усього діапазону потужностей.

Теоретична крива для графіка крос-кореляції розрахована за формулою (4.18). Величина **GSB**, яку отримано з графіка, скоригована на оптичний фон, втрати передачі, ефективність детектування та робочий цикл експерименту. Теоретична крива для графіка **GSB** відповідає лінійній залежності $\text{GSB} = \text{GSBP} \cdot P$. До $P = 200 \text{ nW}$ маємо лінійну залежність, проте для більших потужностей накачки спостерігається зменшення темпу зростання. Ми вважаємо, що для таких потужностей необхідно враховувати перерозподіл населеностей через оптичну накачку. Отримана лінійна залежність дозволяє визначити середню величину $\text{GSBP} = 312(24) \text{ pairs}/(\text{s} \times \text{MHz} \times \text{nW}) \approx 3 \times 10^8 \text{ pairs}/(\text{s} \times \text{MHz} \times \text{mW})$. Таким чином, ми отримали значення **GSBP**, що перевищує рекордні $2 \times 10^8 \text{ pairs}/(\text{s} \times \text{MHz} \times \text{mW})$, отримані з використанням хвильовода, з'єданого з мікрокільцевим резонатором [208]. Потрібно відзначити, що це досягнуто при вузькому спектрі та за значно меншої потужності накачки завдяки значному перекриттю між згустком атомів та світлом усередині **HCPCBGF** та оптимальному узгодженню мод.

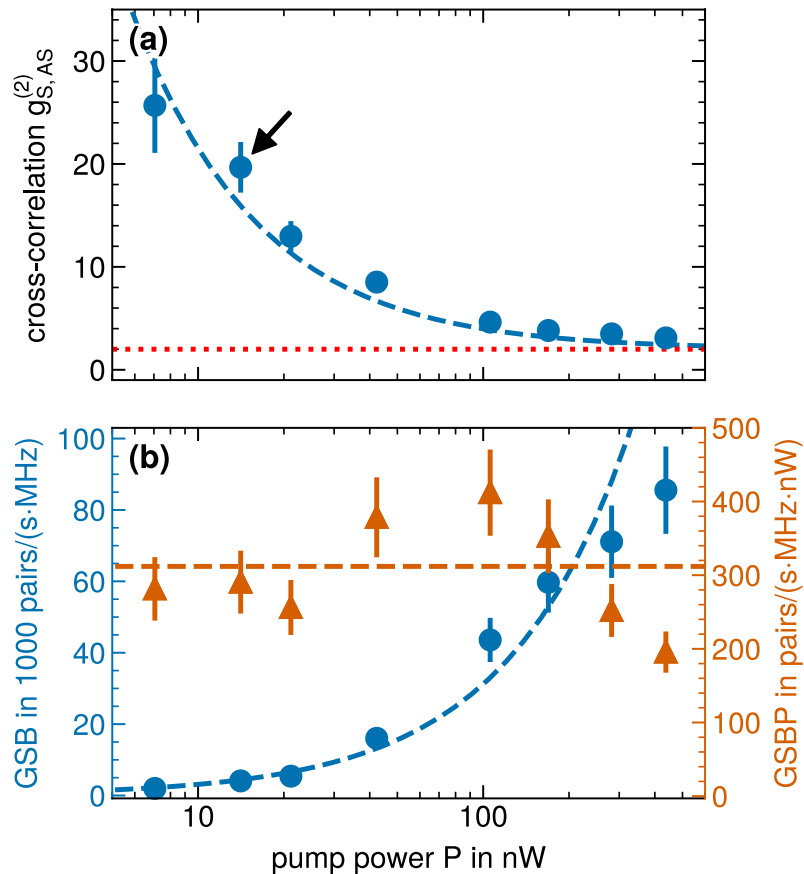


Рисунок 4.10: Властивості біфотонів у залежності від потужності накачки. Частота Рабі контрольного поля складає $2.8\Gamma_{D_1}$, OD взята в діапазоні від 40 до 80. Ефективний час інтегрування змінюється від 0.6 s до 3.5 s. **(a)** Експериментальні значення максимальної крос-кореляції $g_{S,AS}^{(2)}$ (круглі точки). Стрілкою позначено точку, що відповідає рисунку 4.8. Червона пунктирна лінія відповідає класичній межі, визначеній нерівністю Коші-Буняковського-Шварца. Синя пунктирна крива – теоретичній залежності, обчисленій за формулою (4.18) (параметри моделі ті самі, що і на рисунку 4.11). **(b)** GSB (ліва вісь, круглі сині точки) та GSBP (права вісь, помаранчеві трикутні точки). Синя пунктирна лінія – лінійна залежність GSB від потужності накачки за малих значень останньої. Помаранчева пунктирна лінія – середнє значення GSBP (відповідає коефіцієнтові нахилу лінійної залежності GSB від потужності накачки). Лінії похибок включають пуасонову похибку підрахунку фотонів і 10-відсоткову варіацію повної ефективності детектування.

4.10 Вплив оптичної товщини середовища на характеристики джерела біфотонів

На рисунках 4.11 (а, b) представлено вплив потужності накачки P та OD на крос-кореляції $g_{S,AS}^{(2)}$ та $GSBP$. Наше джерело біфотонів дозволяє варіювати OD в межах одного порядку величини, що дозволяє змінювати $GSBP$ в межах двох порядків величини. Рисунки ілюструють, що наше джерело може генерувати як невелику кількість високоскорельованих біфотонів (при невеликих P та OD), так і значну кількість низькоскорельованих біфотонів (при великих P та OD). Якщо обмежитися значеннями параметрів, що дають крос-кореляцію $g_{S,AS}^{(2)} \geq 3$, то максимально досягнуте значення $GSBP$ становить 2×10^9 pairs/(s \times MHz \times mW). Для високих крос-кореляцій $g^{(2)} \gtrsim 50$ відносна похибка зростає до 30%, що обумовлено обмеженою кількістю задетектованих фотонів за скінченної тривалості експерименту.

На завершення, визначимо максимально досягну в нашому експерименті GSB , при якій ми все ще спостерігаємо неklasичні кореляції. Рисунок 4.11 (с) демонструє залежність між GSB та $g_{S,AS}^{(2)}$. Сірі точки відображають експериментальні параметри, для яких не можна нехтувати перенасиченням $SPCM$. Помітно, що з підвищенням GSB крос-кореляція знижується до класичного значення $g_{S,AS}^{(2)} = 2$. На експериментальні точки накладено теоретичну криву, обчислену за формулою (4.18):

$$g_{S,AS}^{(2)} = \frac{2 + \frac{1}{\alpha \cdot GSB} + \frac{\mathcal{N}_S \mathcal{N}_{AS}}{T_S T_{AS} (\alpha \cdot GSB)^2}}{\left[1 + \frac{\mathcal{N}_S}{T_S \alpha \cdot GSB}\right] \left[1 + \frac{\mathcal{N}_{AS}}{T_{AS} \alpha \cdot GSB}\right]}. \quad (4.19)$$

У цій формулі T_j — ефективність детектування, а \mathcal{N}_j — вклад шуму у моді j . Ми також прийняли $n = \alpha \cdot GSB$, де α — єдиний вільний параметр у нашій моделі (для теоретичної кривої на рисунку 4.11 (с) ми взяли $\alpha = 103$). Оскільки набір даних містить експерименти з різними потужностями накачки, то вклад шуму теж змінюється, як показано на рисунку помаранчевим кольором.

Неklasичні кореляції спостерігаються при $GSB \lesssim 2 \times 10^5$ pairs/(s \times MHz). За цією межею досягається значення $GSB = \pi/2 \times 10^6$ pairs/(s \times MHz), при якому послідовні фотони починають перекриватися в часі, і таким чином неklasична поведінка припиняється [217]. Це значення зображено блакитним градієнтом на рисунку 4.11 (с). У цьому діапазоні значення $g_{S,AS}^{(2)} \rightarrow 2$ вказує на те, що хоча стоксове та антистоксове поля лишаться скорельованими, вони обидва мають теплову статистику (якби вони не були скорельованими, ми б мали $g_{S,AS}^{(2)} \rightarrow 1$).

Детальне обговорення цього режиму виходить за рамки цієї роботи. Тим не менше, наші результати показують, що наведене джерело біфотонів може працювати за найвищої теоретично можливої яскравості та дозволяє змінювати її в ме-

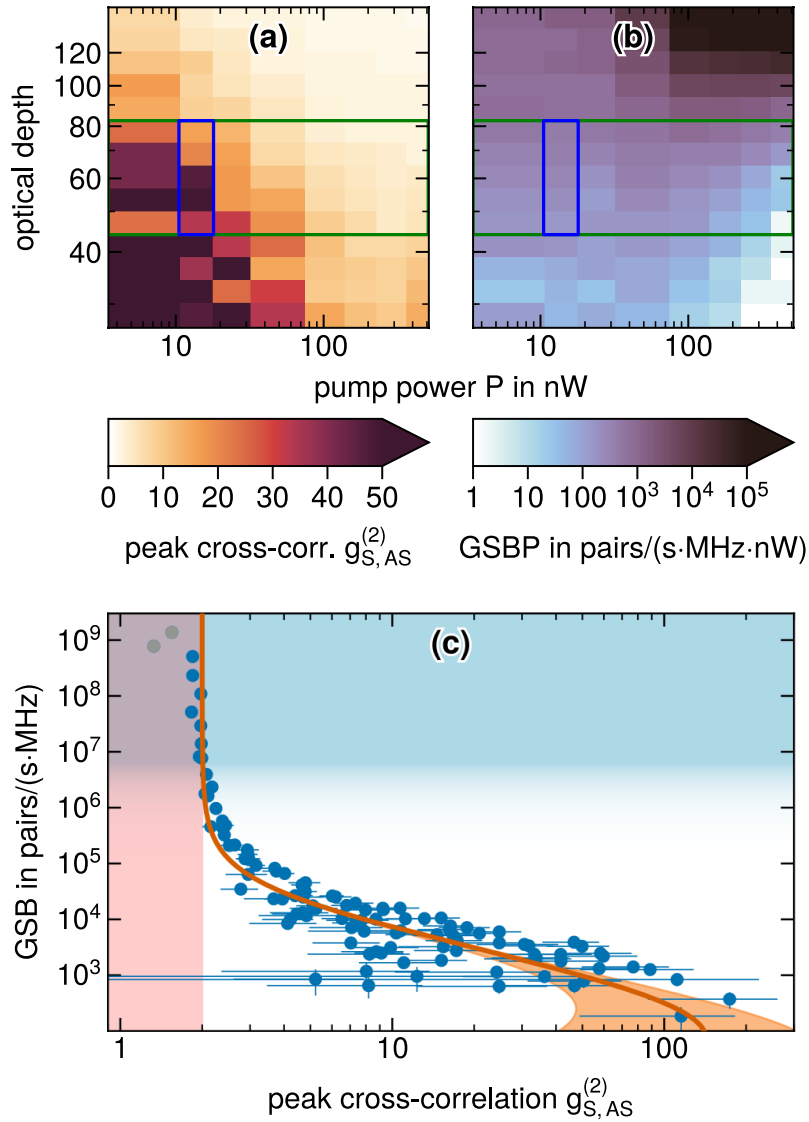


Рисунок 4.11: Максимальна крос-кореляція **(a)** та **GSBP (b)** залежно від потужності накачки та **OD**. Частота Рабі контрольного поля для $OD \gtrsim 55$ складає $2.8\Gamma_{D_1}$, для менших **OD** вона неперервно зменшується для забезпечення сталої спектральної ширини **EIT**. **Блакитним та зеленим прямокутниками** позначено значення параметрів, зображені відповідно на рисунках 4.8 та 4.10. **(c)** Залежність між **GSB** та крос-кореляцією (набір даних той самий, що і в (a) та (b)). **Червоним кольором** позначено зону класичного світла $g_{S,AS}^{(2)} \leq 2$, а **синім** – зону, де послідовні фотони перекриваються в часі (градієнт зображає перехід у цей режим). Лінії похибки відповідають стандартній статистичній похибці підрахунку фотонів. **Суцільна помаранчева крива** була розрахована за формулою (4.19), а **помаранчева зона навколо неї** відображає вплив залежного від накачки шуму.

жах двох порядків величини, створюючи вузькосмугові біфотони за надмалих потужностей накачки.

4.11 Висновки до розділу 4

У розділі наведено результати першого дослідження джерела біфотонів на основі спонтанної чотиривильової взаємодії з атомами рубідію-87, завантаженими всередину порожнистого волокна **HCPCBGF**.

- Використовуючи чисельну модель взаємодії поляризованого світла з атомами, було проведено симуляції джерела біфотонів. Зокрема, досліджено залежність поляризацій стоксового та антистоксового поля від поляризацій накачки та контрольного поля. Показано, що якщо контрольне поле та поле накачки поляризувати ортогонально одне до одного, то стоксове поле поляризується лінійно і ортогонально до поля накачки, а антистоксове — лінійно і ортогонально до контрольного поля. Це дозволяє відокремлювати слабкі однофотонні поля від сильних за допомогою поляризуючого світлоділителя (**PBS**) без складних технологій фільтрації та розділення за частотою.
- Продемонстровано високу ефективність джерела біфотонів із досягненням **GSBP** у $3.12(24) \times 10^8 \text{ pairs}/(\text{s} \times \text{MHz} \times \text{mW})$ при потужностях накачки до 200 nW. Ширина спектра біфотонів ($2\pi \times 6.5 \text{ MHz}$) приблизно співпадає з ширинами спектрів джерел у вільному просторі і є сумісною з існуючими реалізаціями атомної квантової пам'яті.
- Спостережено крос-кореляцію та порушення нерівності Коші-Буняковського-Шварца на рівні $97(24)$ разів, що свідчить про неklasичну природу біфотонів. Автокореляція стоксових та антистоксових полів підтверджує їхню однофотонність, а крос-кореляція свідчить про квантову сплутаність.
- Джерело біфотонів на основі **HCPCBGF** поєднує переваги джерел у вільному просторі та у хвильоводах. Досягнута **GSBP** є на порядок вищою, а спектр біфотонів достатньо вузький порівняно з іншими джерелами. Це робить його привабливим для інтеграції у фотонні мережі, використання в супутникових системах квантового розподілу ключів та застосування у фотонній квантовій метрології.
- Запропоновано шляхи подальшого вдосконалення, зокрема використання драбинних схем, безперервне завантаження атомів та внутрішньоволоконне охолодження для підвищення ефективності та робочого циклу.

Отже, отримані результати підтверджують великий потенціал джерела біфотонів на основі **НСРСВGF** для реалізації застосувань у квантових технологіях.

Розділ 5

Суперфлуоресценція в неоднорідному середовищі

Другим експериментальним дослідженням, описаним у дисертації, є дослідження раманівської суперфлуоресценції (англ. *superfluorescence*, **SF**) на атомах рубідію-87, завантажених у волокно **HCPCBGF**. Експеримент провела та сама група з Технічного університету Дармштадта, що проводила попередній експеримент зі створення джерела біфотонів. Статтю про цей експеримент було подано до друку в журнал *Physical Review Research*, її препрінт знаходиться у вільному доступі в репозиторії arXiv [15].

5.1 Вступ

Оскільки спонтанне випромінювання є наслідком взаємодії атома з навколишнім вакуумним полем, то характерний час випромінювання Γ^{-1} залежить від просторової конфігурації поля і змінюється, наприклад, за присутності наночастинок [218] чи в оптичному резонаторі [219]. Якщо розглянути систему з N дворівневих атомів (англ. *two-level systems*, **TLS**), що диполь-дипольно взаємодіють між собою через спільне початково вакуумне поле, то їхнє спонтанне випромінювання пришвидшиться навіть без зміни просторової конфігурації поля, як було вперше теоретично передбачено Робертом Генрі Діке (англ. *Robert Henry Dicke*) в 1954 році [220]. Завдяки взаємодії, між різними **TLS** створюється корегентність, спричиняючи їхню спонтанну синхронізацію [221] і таким чином збільшуючи швидкість спонтанного випромінювання $\Gamma_N > \Gamma$. Це явище колективного спонтанного випромінювання отримало назву «надвипромінювання» (англ. *superradiance*, **SR**), також для нього використовується термін «ефект Діке». З часу першої експериментальної реалізації в [222], **SR** було експериментально досліджено в різноманітних умовах: у вільному просторі [223—226], у хвильоводі з фотонним кристалом [227], у кагоме-во-

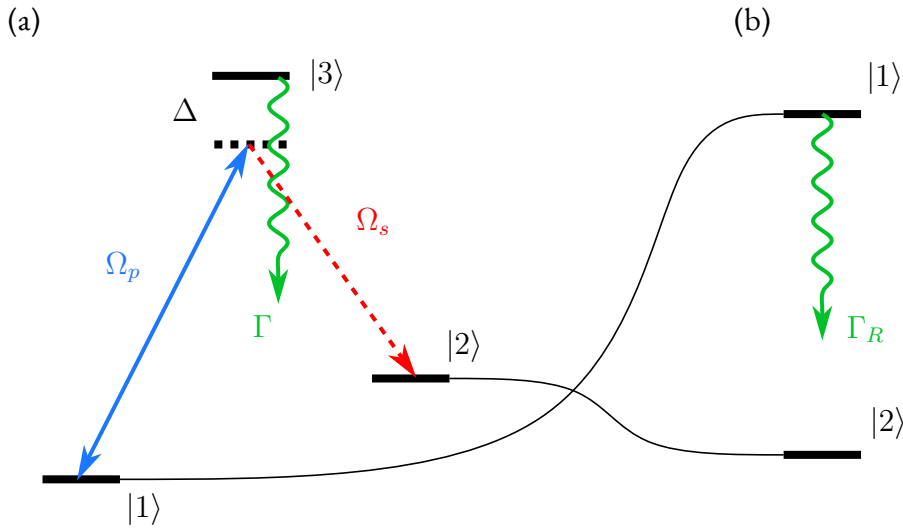


Рисунок 5.1: Трирівнева схема раманівської суперфлуоресценції **(a)** та відповідна ефективна дворівнева схема **(b)**.

локнах [228], на поверхні нановолокон [229, 230], із використанням квантових точок [231], надпровідних кубітів [232] і бактерій-фотосинтетиків [233].

Різновидом **SR** є *суперфлуоресценція* (англ. *superfluorescence*, **SF**). Цей термін запропоновано у статті [234] для позначення такого **SR**, що відбувається без початкового макроскопічного дипольного моменту: всі **TLS** на початку процесу є повністю інвертованими, а когерентність між ними створюється за рахунок взаємодії з квантовими флуктуаціями.

Під час **SR** та **SF** атоми переходять на нижній рівень у $\Gamma_N/\Gamma = \mu N$ разів швидше, ніж переходив би один атом [235], де μ — геометричний фактор, що описує частку спонтанно випроміненого світла, що здатне взаємодіяти з ансамблем із N атомів в обраній моді поля. У [236] μ розглядається як одноатомний, а $\mu_N = \mu N$ — як багатоатомний коефіцієнт кооперації (англ. *cooperativity*).

Другою особливістю **SR** та **SF** є те, що світло випромінюється у вигляді короткого яскравого імпульса тривалістю порядку $(N\Gamma)^{-1}$ і максимальною інтенсивністю $I_{\max} \propto N^2$ [235]. Цей імпульс випромінюється зі скінченною затримкою t_D , середнє значення котрої під час **SF** складає [237]

$$\langle t_D(N) \rangle = \frac{1}{4\mu N\Gamma} \log^2 \left(\sqrt{2\pi N} \right)^2. \quad (5.1)$$

5.2 Ефективна дворівнева схема

Повної початкової інверсії населеностей, необхідної для спростереження **SR**, у дворівневій системі можна досягти, наприклад, за допомогою так званих

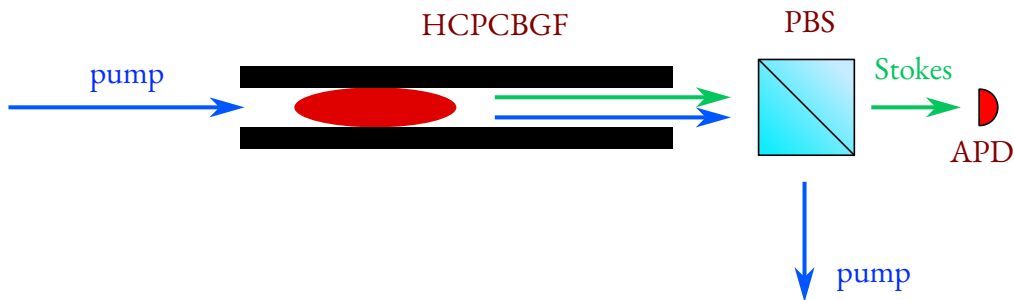


Рисунок 5.2: Спрощена схема експерименту.

π -імпульсів [229, 238]. Проте існує можливість уникнути значних технічних проблем, пов'язаних із використанням π -імпульсів чи інших методів інверсії TLS, за допомогою трирівневої схеми, зображеної на рисунку 5.1 (а).

На початку експерименту всі атоми знаходяться в стані $|1\rangle$. Опромінюючи атоми полем із частотою Рабі Ω_p , відстроєним від переходу $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ на величину Δ таку, що $\Gamma^2 + 4\Delta^2 \gg \Omega_p^2$, можна знехтувати населеністю на верхньому рівні $|3\rangle$ і спростити систему з трьох до двох рівнів за допомогою адіабатичного наближення [239]. У такій дворівневій системі, що складається з нижніх рівнів $|1\rangle$ і $|2\rangle$ (рисунок 5.1 (b)), матимемо інверсію населеностей, а швидкість спонтанного переходу в ній

$$\Gamma_R = R_B \Gamma \cdot \frac{\Omega_p^2}{\Gamma^2 + 4\Delta^2}, \quad (5.2)$$

де Γ — швидкість спонтанного переходу з верхнього рівня $|3\rangle$ на основні рівні $|1\rangle$ і $|2\rangle$, R_B — коефіцієнт розгалуження для нижнього рівня $|2\rangle$.

Використання такої ефективної TLS має суттєві переваги перед реальними TLS, оскільки швидкість спонтанного переходу Γ_R можна контролювати, змінюючи інтенсивність поля накачки та його частоту.

5.3 Схема експерименту

Як і джерело біфотонів із попереднього розділу, явище SF досліджувалося на лазерно охолоджених атомах рубідію, завантажених усередину НСРСВGF. Процес завантаження проходить так само, як і в попередньому дослідженні — його описано в розділі 4.3. Схему експерименту показано на рисунку 5.2. Волокно забезпечує взаємодію світла з атомами впродовж усієї його довжини, уможливорюючи таким чином колективні ефекти [230, 240].

Експеримент виконується на рівнях надтонкої структури D_1 -лінії рубідію-87: рівням $|1\rangle$ на рисунку 5.1 відповідають підрівні $F=1$ та $F=2$ рівня тонкої структури $5^2S_{1/2}$, а верхньому рівню $|3\rangle$ — рівень $5^2P_{1/2}(F=2)$. Заходів для приготування

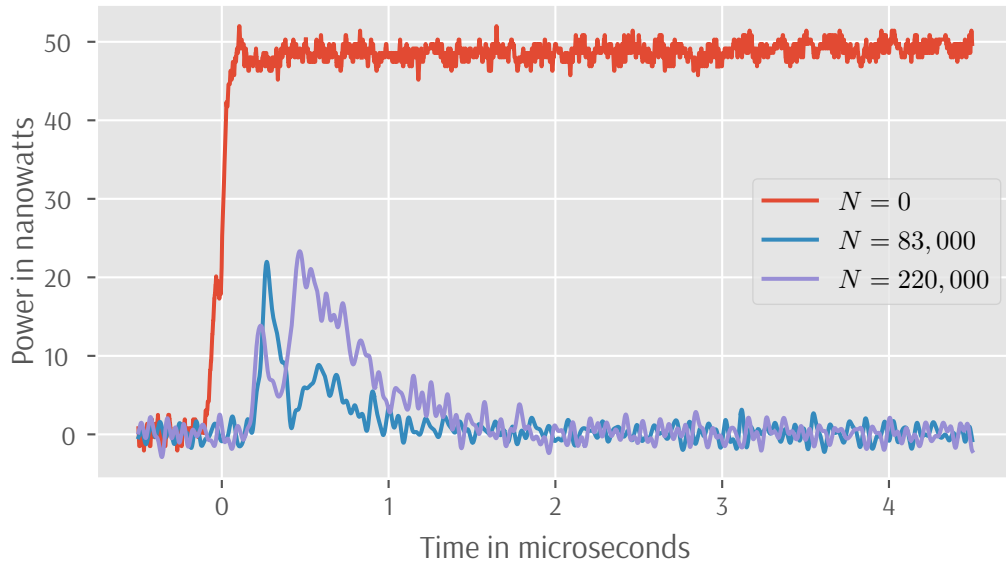


Рисунок 5.3: Залежність потужності SF-імпульса від часу за відстроювання накачки $\Delta = 18.4\Gamma$ та її частоти Рабі $\Omega_p(z=0) = 6.4\Gamma$. Для $N = 0$ показано потужність накачки, усереднену з 16 експериментів. За $t = 0$ прийнято час, коли виміряна потужність накачки досягає половини усередненого максимального значення.

систему у якомуś виділеному магнітному підрівні не приймається, тому населеності всіх трьох магнітних підрівнів вважаємо однаковими.

Поле накачки поляризується так, що на обох кінцях волокна довжиною 14 см поляризація є лінійною. Кількість атомів N визначається шляхом налаштування накачки резонансно на частоту переходу $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$. Вимірюючи час просвітлення завдяки ефекту оптичної накачки, можна визначити N із відносною похибкою $\lesssim 3.5\%$ [128].

Далі накачка відстроюється від переходу $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ вниз (у «червоному» напрямку) на величину Δ , яка може змінюватися в діапазоні від 2Γ до 26.4Γ . Потужність стоксового поля P_s реєструємо як функцію часу, відокремлюючи його від накачки за допомогою PBS: як чисельне моделювання (розділ 3), так і попередні експерименти підтверджують, що стоксове поле генерується поляризованим ортогонально до накачки. Потужність стоксового поля реєструється за допомогою лавинного фотодіода (англ. *avalanche photodiode*, APD) Laser Components SAR500H1B.

5.4 Профіль суперфлуоресцентного імпульса

Приклад часової еволюції стоксового поля зображено на рисунку 5.3. За нульовий момент часу тут прийнято момент увімкнення поля накачки, точніше, оскільки воно зростає плавно протягом ~ 100 ns, то момент, коли поле досягає половини максимальної потужності. Як бачимо, спочатку протягом кількох сотень наносекунд стоксове поле відсутнє, але потім спостерігаємо яскравий короткий імпульс, максимальна потужність котрого для $N = 8.3 \times 10^4$ (синя крива на рисунку 5.3) досягає половини потужності накачки. Після цього яскравого короткого імпульса часто спостерігається додатковий імпульс меншої потужності, що є проявом когерентного відлуння (англ. *coherent ringing*) [235, 241]. Такий профіль — один короткий яскравий імпульс, за котрим час від часу маємо ще один слабший — спостерігаємо майже за всіх значень параметрів. Тільки для максимального експериментального числа атомів $N = 2.2 \times 10^5$ профіль виглядає інакше (фіолетова крива на рисунку 5.3): другий імпульс стає потужнішим за перший.

Щоб зібрати статистику, вимірювання проводилися по 100 разів для кожного набору параметрів (N та Δ). Відео для $N = 8.3 \times 10^4$ можна побачити на Figshare [242]. Великі флуктуації у формі імпульсів (стандартне відхилення затримки t_D першого піка від середнього значення $\langle t_D \rangle$ складає $\sim 38\%$) вказують на те, що ми маємо справу саме з SF, коли імпульси виникають у результаті наростання поля від вакуумних флуктуацій до класичних імпульсів [243, 244]. Динаміка стоксового поля відбувається на часах, набагато коротших за середню швидкість спонтанного переходу $\langle \Gamma_R \rangle_r = 2\pi \times 45$ kHz. Усереднення за радіусом тут і далі робимо з урахуванням радіального розподілу атомів:

$$\langle f \rangle_r = \frac{\int_0^\infty f(r)n(r) \cdot 2\pi r dr}{\int_0^\infty n(r) \cdot 2\pi r dr}, \quad (5.3)$$

де $n(r)$ — концентрація атомів, що розподілена за гаусовим законом із $1/e$ -радіусом $r_a = 1.7$ μm :

$$n(r) \propto \exp\left(-\frac{r^2}{r_a^2}\right), \quad (5.4)$$

а інтегрування в формулі 5.3 продовжено до нескінченності, оскільки вклад радіусів, більших за внутрішній радіус волокна (7 μm) є малим.

5.5 Вплив кількості атомів на SF-імпульси

Розглянемо залежність параметрів SF-імпульса від кількості атомів N . На рисунку 5.4 показано залежність середньої затримки $\langle t_D \rangle$ від N . Потужність та частота

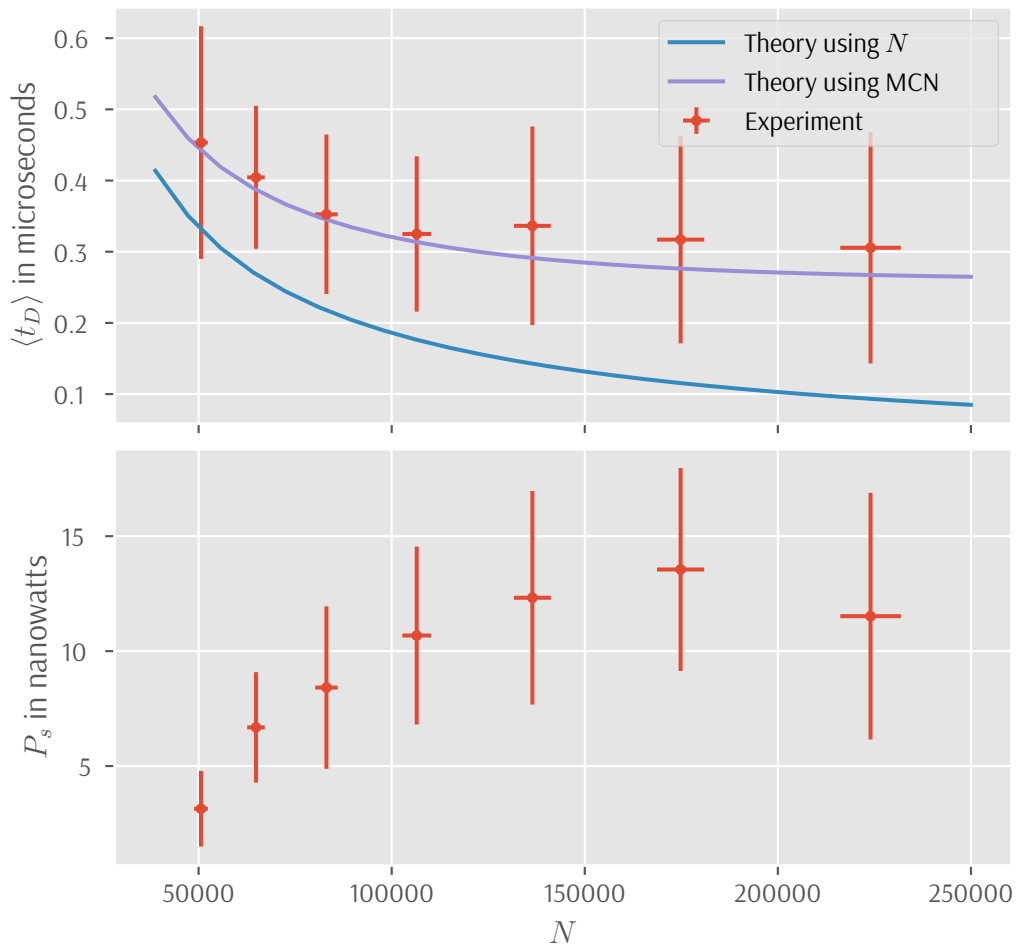


Рисунок 5.4: Залежність середньої затримки першого SF-піка $\langle t_D \rangle$ та його максимальної потужності P_s від кількості атомів N . Частота Рабі в усіх експериментах $\Omega_p(z=0) = 6.4\Gamma$, а відстройка частоти накачки $\Delta = 18.4\Gamma$. **Теоретичні криві** на графіку $\langle t_D \rangle$ розраховано за формулою (5.1). **Лінії похибок** відповідають стандартному відхиленню експериментальних даних від середнього значення. Звернімо увагу, що оскільки для кожної точки було зроблено 100 ідентичних експериментів, стандартна похибка визначення середніх значень ϵ в $\sqrt{100} = 10$ разів меншою за зображене відхилення.

накачки тут такі самі, що і на рисунку 5.3. На рисунку 5.4 також показано теоретичну залежність (5.1) (синя лінія). Видно, що експериментальна затримка перевищує теоретичну, що характерно для неоднорідно уширених систем [245].

На рисунку 5.4 також показано залежність максимальної потужності першого SF-піка P_s від N . Ця залежність, хоч і повинна бути квадратичною за теорією [235], в експерименті сповільнюється з ростом N . Для максимального N спостерігається навіть менша середня потужність, ніж для попередньої точки. Це можливо пояснюється тим, що за максимального експериментального $N = 2.2 \times 10^5$ найпотужнішим стає не перший, а другий імпульс.

Для визначення коефіцієнта кооперації μ_N використовується відношення колективної швидкості спонтанного переходу до середньої за радіусом одноатомної швидкості переходу в ефективній TLS:

$$\mu_N = \frac{\Gamma_N}{\langle \Gamma_R \rangle_r}, \quad (5.5)$$

де колективну швидкість спонтанного переходу визначаємо з експериментальної затримки $\langle t_D \rangle$ за формулою (5.1):

$$\Gamma_N = \frac{\log^2 \left(\sqrt{2\pi N} \right)}{4 \langle t_D \rangle}, \quad (5.6)$$

а одноатомну — за формулою (5.2), усереднюючи за радіусом за формулою (5.3).

На рис. 5.5 представлено графік залежності коефіцієнта кооперації μ_N від кількості атомів N у великому діапазоні відстройок Δ . Теоретична залежність є лінійною: $\mu_N = \mu N$. Для гаусового пучка з $1/e^2$ -радіусом w_0 у вільному просторі існує теоретичне значення $\mu = \frac{3}{8\pi^2} \cdot \frac{\lambda^2}{w_0^2}$ [235]. Для експериментальних значень радіуса пучка $w_0 = 2.75 \mu\text{m}$ та довжини хвилі $\lambda = 795 \text{ nm}$ отримуємо $\mu = 3.59 \times 10^{-3}$. Однак для оптичного волокна μ визначається чисельною апертурою (англ. *numerical aperture*, NA): $\mu = \text{NA}^2/4$ [228]. Для використаного в експерименті волокна $\text{NA} = \lambda/(\pi w_0) = 0.092(6)$, в результаті чого $\mu \sim 2.1(3) \times 10^{-3}$. Останнє значення використовується в теоретичній залежності на рисунку 5.5.

Як бачимо, тільки для мінімальних N і максимальних Δ експериментальні значення μ_N збігаються з теоретичними. Для менших відстройок маємо менший коефіцієнт кооперації μ_N , а для близьких до резонансу експериментів μ_N узагалі не залежить від N . Отже, існують деякі чинники, що обмежують колективне спонтанне випромінювання. Обговоримо їх у наступному підрозділі.

5.6 Максимальне колективне число атомів

Наш експеримент наочно демонструє виражену колективну поведінку. Проте отримані результати виявилися як кількісно, так і якісно відмінними від теоре-

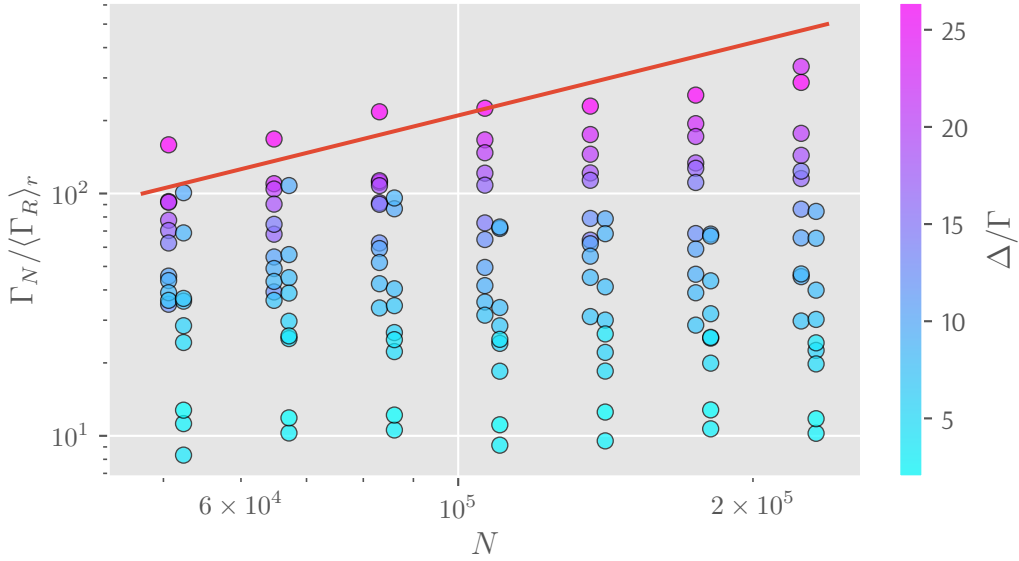


Рисунок 5.5: Експериментально визначений коефіцієнт кооперації $\mu_N = \Gamma_N / \langle \Gamma_R \rangle_r$ у залежності від кількості атомів N . **Колір точок** указує на відстройку Δ/Γ . Частота Рабі накачки в усіх експериментах $\Omega_p(z=0) = 6.4\Gamma$. Суцільна лінія відповідає теоретичній залежності $\Gamma_N / \langle \Gamma_R \rangle_r = \mu N$.

тичних. У цьому підрозділі ми спробуємо пояснити причину цих відхилень та доповнити теоретичний підхід.

Ми вважаємо, що ключовим чинником, який спричиняє відхилення експериментальних результатів від теорії, є неоднорідність середовища: різні атоми мають різні швидкості спонтанного переходу Γ_R , а також (через квадратичний ефект Штарка, фонове магнітне поле, скінченну температуру тощо) випромінюють фотони трохи різних частот. Розглядаючи подібну ситуацію, Фортунато Тіто Ареккі (*італ.* *Fortunato Tito Arecchi*) та Ерік Куртанс (*фр.* *Éric Courtens*) у статті [246] ввели так зване *максимальне колективне число атомів* (*англ.* *maximum cooperation number, MCN*) — ефективне число атомів, котрі беруть участь у колективному SF-процесі. Це число не може перевищувати реальне число атомів N і замінює його в теоретичних формулах.

Ми визначаємо два чинники, що впливають на **MCN**: неоднорідне уширення та послаблення поля накачки.

Спочатку розглянемо *неоднорідне уширення*. Ареккі та Куртанс у [246] запропонували рахувати його вклад як співвідношення ширин однорідного та неоднорідного уширення, якщо це співвідношення менше за одиницю:

$$\eta_{\text{inh}} = \begin{cases} \frac{\sigma_{\text{hom}}}{\sigma_{\text{inh}}} & \text{якщо } \sigma_{\text{hom}} < \sigma_{\text{inh}}; \\ 1 & \text{інакше.} \end{cases} \quad (5.7)$$

Ширину однорідного уширення ми визначаємо просто як обернений час увімкнення накачки: $\sigma_{\text{hom}} = 1/\tau_p$. Неоднорідну ширину ми визначаємо як суму стандартних відхилень швидкості спонтанного переходу Γ_R та штарківського зсуву $S = \frac{\Omega^2}{4\Delta}$ від їхніх середніх значень: $\sigma_{\text{inh}} = \delta\Gamma_R + \delta S$. Таким чином маємо

$$\eta_{\text{inh}} = \min \left[1, \frac{1}{\tau_p(\delta S + \delta\Gamma_R)} \right]. \quad (5.8)$$

Стандартне відхилення ми рахуємо тільки за радіусом, бо воно є значно більшим за відхилення вздовж волокна (усереднення виконуємо за формулою 5.3):

$$\delta f = \sqrt{\langle (f - \langle f \rangle_r)^2 \rangle_r} = \sqrt{\langle f^2 \rangle_r - \langle f \rangle_r^2}. \quad (5.9)$$

Далі розглянемо вклад *послаблення накачки* до **MCN**. Як показано в [247, 248], послаблення накачки заважає утворенню часового стану Діке (англ. *timed-Dicke state*), а також у нашому експерименті напряду впливає на швидкість спонтанного переходу Γ_R в ефективній **TLS**. Цей вплив ми враховуємо, визначаючи ефективну швидкість спонтанного переходу:

$$\langle \Gamma_N^{\text{eff}} \rangle_{r,z} = \int_0^N \langle \Gamma_R(\Omega_p^2(r, \mathcal{N})) \rangle_r d\mathcal{N}, \quad (5.10)$$

де $\mathcal{N}(z)$ — кількість атомів між початком волокна і координатою z , а α тоді дорівнює **OD** з урахуванням відстройки в розрахунку на один атом. Таким чином, ми можемо використовувати \mathcal{N} замість координати z , і так врахувати неоднорідний розподіл атомів уздовж волокна.

Вклад послаблення накачки, котрий у [249] було названо *фактором затінення* (англ. *shadow factor*), ми описуємо коефіцієнтом

$$\eta_{\text{shadow}} = \frac{\langle \Gamma_N^{\text{eff}} \rangle_{r,z}}{N \langle \Gamma_R(z=0) \rangle_r}. \quad (5.11)$$

Ефективне число атомів **MCN** отримуємо, перемножуючи вклади обох ефектів:

$$\text{MCN} = \eta_{\text{inh}} \cdot \eta_{\text{shadow}} \cdot N. \quad (5.12)$$

5.7 Просторовий розподіл поля накачки

Для того, щоб застосувати описаний вище підхід до експериментальних даних, потрібно визначити, які чинники впливають на просторовий розподіл накачки. За радіусом поле розподілене за гаусовим законом:

$$\Omega_p^2(r, \mathcal{N}) = \Omega_0^2(\mathcal{N}) \exp \left(-2 \frac{r^2}{w^2} \right). \quad (5.13)$$

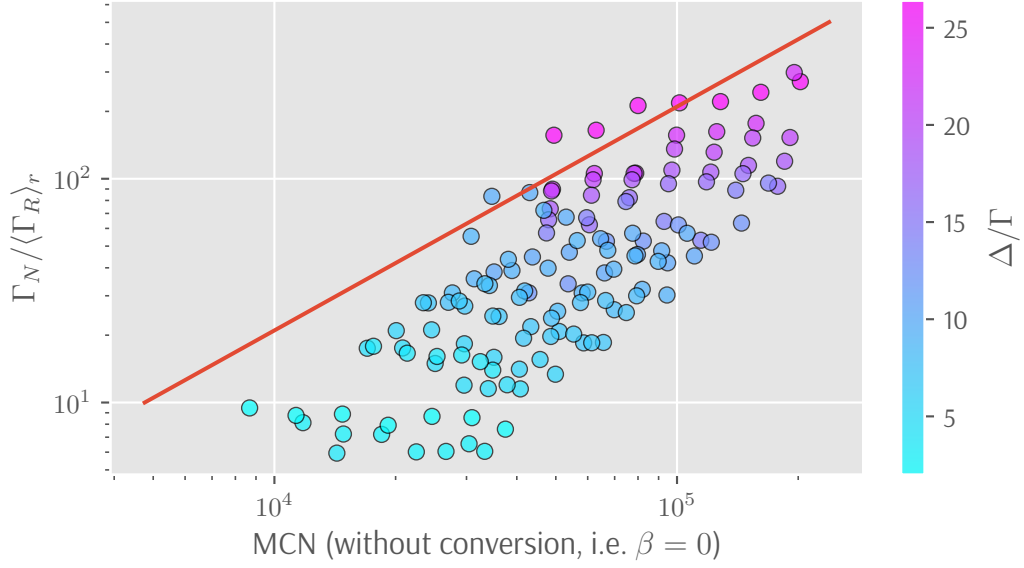


Рисунок 5.6: Коефіцієнт кооперації $\mu_N = \Gamma_N / \langle \Gamma_R \rangle_r$ у залежності від **MCN**, у якому враховано неоднорідне уширення та лінійне поглинання, але не враховано втрати енергії на генерацію **SF**-імпульса. **Колір експериментальних точок** відповідає відстройці накачки Δ/Γ , а **суцільна лінія** – теоретичній залежності $\mu_N = \mu \cdot \text{MCN}$.

Уздовж волокна, за координатою \mathcal{N} , поле накачки послаблюється, по-перше, за рахунок лінійного поглинання за законом Бугера-Ламберта-Бера:

$$\Omega_0^2(\mathcal{N}) = \Omega_0^2(0)e^{-\alpha\mathcal{N}}. \quad (5.14)$$

Залежність α від частоти вважаємо лоренцівською:

$$\alpha = \alpha_0 \left\langle \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + 4\Delta^2} \right\rangle_r. \quad (5.15)$$

Тут α_0 — резонансна **OD** на один атом, і її чисельне значення складає $\alpha_0 = 2.75 \times 10^{-3}$. Таким чином, для максимальної кількості атомів $N = 2.2 \times 10^5$ маємо резонансну **OD** = 600.

Якщо врахувати тільки лінійне поглинання за формулою (5.14) (звернімо увагу, що така теорія не містить жодних вільних параметрів) і побудувати графік μ_N vs **MCN**, то ми матимемо розподіл, зображений на рисунку 5.6. Видно, що точки стали ближчими до теоретичної прямої, ніж на рисунку 5.5, але вони все ще лишаються справа від неї, тобто насправді в **SF**-процесі бере участь іще менше атомів. Отже, треба врахувати додаткові чинники, які пригнічують колективне випромінювання.

Ми вважаємо, що крім лінійного поглинання, поле накачки також послаблюється власне через генерацію SF-імпульса: потужність останнього, як бачимо на рисунку 5.3, досягає одного порядку величини з потужністю накачки, а енергію SF-імпульс бере саме з поля накачки. Враховуючи, що рівняння для середньої затримки $\langle t_D \rangle$ (5.1) було виведено в режимі експоненційного росту SF-імпульса [237], ми модифікуємо коефіцієнт поглинання в законі Бугера-Ламберта-Бера:

$$\tilde{\alpha}(\Delta) = \alpha(\Delta) + \beta(\Delta) \cdot G(\Delta, z=0). \quad (5.16)$$

Коефіцієнт росту SF-імпульса можна приблизно записати як

$$G(\Delta, z=0) \approx \alpha_0 \left\langle \frac{2\Gamma_R(\Delta, z=0)}{\gamma} \right\rangle_r, \quad (5.17)$$

де γ — швидкість декогеренції між нижніми рівнями трирівневої системи.

Формула (5.17) відповідає умовам стаціонарного стану в [239]: ми знехтували перехідними умовами під час наростання стоксового поля, оскільки врахування часової залежності додатково ускладнило теоретичний опис. Щоб урахувати це спрощення, ми додали залежний від відстройки коефіцієнт $\beta(\Delta)$, що є єдиним параметром задачі.

Щоб порахувати $G(\Delta)$, потрібно ще визначити швидкість декогеренції γ . Вона визначається трьома чинниками. По-перше, існує декогеренція γ_0 , що з'являється через фонові магнітні поля, ненульову температуру атомів тощо. Її було виміряно під час експериментів із FWM (розділ 4): $\gamma_0 = 0.057(6)\Gamma$ [13]. По-друге, декогеренцію створює неоднорідний штарківський зсув δS . По-третє, спонтанний перехід між двома нижніми рівнями Γ_R також створює декогеренцію. Таким чином отримуємо

$$\gamma = \gamma_0 + \delta S + \langle \Gamma_R \rangle_r. \quad (5.18)$$

Як було сказано, коефіцієнт β є єдиним вільним параметром моделі. Оскільки β залежить від складної просторово-часової динаміки генерації SF-імпульса, розумно припустити, що цей коефіцієнт залежить від частоти поля. Тому ми для кожного експериментального значення Δ побудували графік $\langle t_D \rangle$ vs N і підігнали до експериментальних точок залежність (5.1), де замінили N на порахований за формулою (5.12) MCN. Знайдені значення $\beta(\Delta)$ зображено у вигляді точок на рисунку 5.8. Як бачимо, для $\Delta > 6\Gamma$ залежність близька до лінійної: $\beta(\Delta) = 0.182 - 6.1 \times 10^{-3} \Delta/\Gamma$. Причина такої лінійної залежності є поки що невідомою. Для цієї залежності $\beta(\Delta)$ ми також побудували графік μ_N vs MCN і зобразили його на рисунку 5.7.

Близько до резонансу, при $\Delta \lesssim 6\Gamma$, β значно зростає, що вказує на те, що наша модель при таких невеликих відстройках стає не задовільною. Оскільки в наших експериментах $\Omega_p = 6.4\Gamma$, то таку поведінку β можна пояснити тим, що

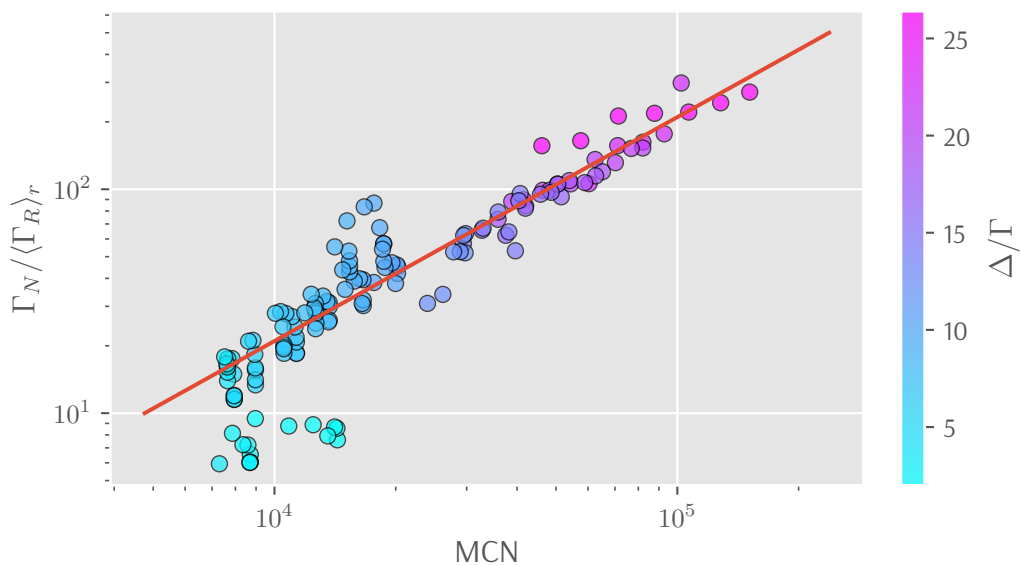


Рисунок 5.7: Коефіцієнт кооперації $\mu_N = \Gamma_N^{\text{eff}} / \langle \Gamma_R \rangle_r$ залежно від ефективного кількості атомів MCN , котра враховує неоднорідне уширення, лінійне поглинання та втрати на генерацію SF-імпульса. **Колір експериментальних точок** відповідає відстройці накачки Δ/Γ , а **суцільна лінія** – теоретичній залежності $\mu_N = \mu \cdot MCN$.

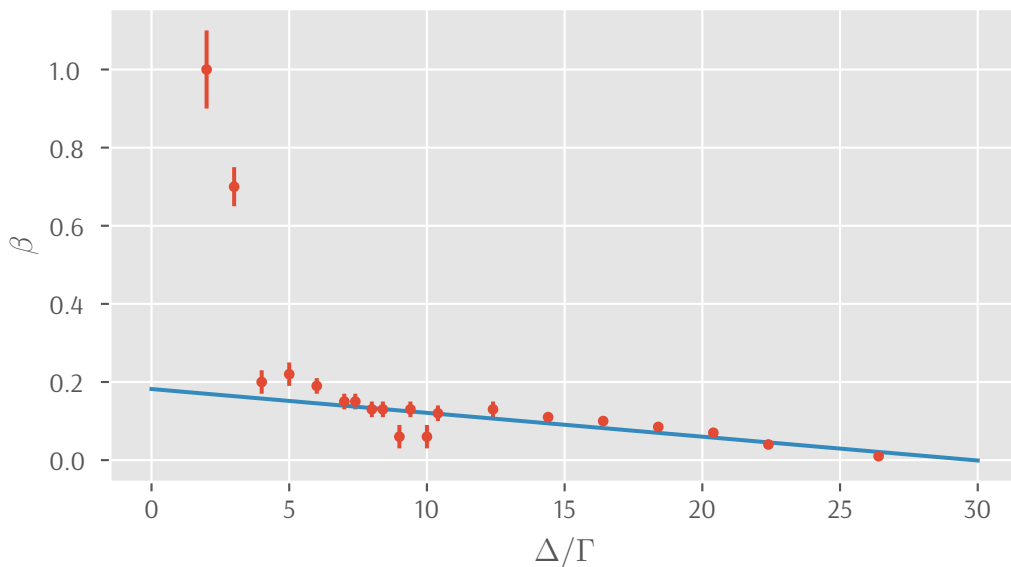


Рисунок 5.8: Залежність коефіцієнта β від відстройки Δ , визначена з експериментальних залежностей $\langle t_D(N) \rangle$. **Суцільна лінія** є лінійною залежністю $\beta = 0.182 - 6.1 \times 10^{-3} \Delta/\Gamma$, отриманою з експериментальних точок для $\Delta > 6\Gamma$ підгонкою за методом найменших квадратів.

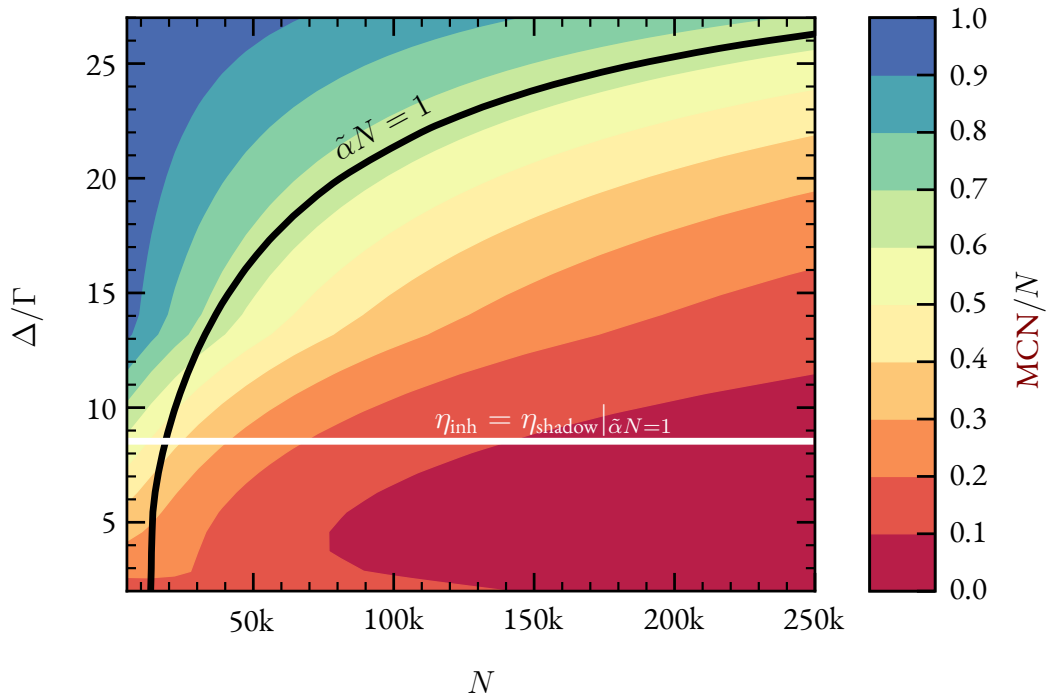


Рисунок 5.9: Співвідношення MCN/N у залежності від N та Δ . **Чорна лінія** визначає межу, на якій $\tilde{\alpha}N = 1$, тобто накачка на всій довжині волокна послаблюється в e разів. **Біла лінія** визначає межу, на якій вклади неоднорідного уширення та послаблення накачки є рівними, тобто для менших відстройок домінує неоднорідне уширення, а для більших – послаблення накачки.

при переході від трирівневої схеми до ефективної дворівневої ігнорується населеність верхнього рівня, і працювати з ефективною TLS можна тільки за умови $\Omega_p^2 \ll \Gamma^2 + 4\Delta^2$. Також при таких малих відстройках важливою є дисперсія, яку наша спрощена теорія не враховує.

5.8 Порівняння вкладів неоднорідного уширення та послаблення накачки у MCN

Використання MCN дозволяє розширити відому теорію SF для однорідних середовищ на неоднорідні. Оскільки в нашій теорії MCN визначається двома чинниками — неоднорідним уширенням та послабленням накачки, виникає питання, за яких умов який із цих двох чинників переважає.

На рисунку 5.9, де зображено залежність співвідношення $MCN/N = \eta_{inh} \times \eta_{shadow}$ від числа атомів N та відстройки Δ , також позначено лінію, де OD з урахуванням відстройки дорівнює одиниці, тобто накачка послаблюється в e разів, що

негативно впливає на SF [226, 248]. На рисунку також позначено лінію, де вклади неоднорідного уширення η_{inh} та послаблення накачки η_{shadow} співпадають. Як бачимо, неоднорідне уширення переважає тільки близько до резонансу: $\Delta \lesssim 9\Gamma$. Це свідчить про те, що для згустка атомів у порожньому волокні можна обрати такі експериментальні параметри, за яких радіальним розподілом речовини і світла можна знехтувати.

5.9 Результати чисельного моделювання SF

У цьому підрозділі наводяться результати чисельного моделювання описаних вище експериментів за допомогою моделі, представленої в розділі 3. Під час чисельних розрахунків враховувалися всі магнітні підрівні D₁-лінії рубідію-87.

Як і звичайне спонтанне випромінювання, SF є квантово-оптичним за природою явищем, що виникає через взаємодію інвертованих атомів із початково вакуумним навколишнім полем. Тому для його опису з перших принципів поле необхідно розглядати квантово. З метою уникнення складнощів квантового опису в статті [235, eq. 6.57] запропоновано описувати SF напівкласично, поділивши середовище на сегменти і задаючи початкову когерентність між рівнями TLS як випадкову величину, що має комплексний гаусовий розподіл $\mathcal{CN}(0, 1/N_i)$ із нульовим очікуванням та дисперсією $1/N_i$, де N_i — кількість атомів в i -тому сегменті.

У трирівневій системі, відповідно, така випадкова когерентність задається між двома нижніми рівнями системи, а в складній багатоатомній — між кожною парою магнітних підрівнів, перехід між якими є дозволеним через верхні рівні:

$$\rho_{12}(z_i) = \sum_{(M_1, M_2) \in \text{allowed}} \frac{\varrho(z_i, M_1, M_2)}{\sqrt{q}} \left| \begin{matrix} F=1 \\ M_1 \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} F=2 \\ M_2 \end{matrix} \right|, \quad (5.19)$$

де $\varrho(z_i, M_1, M_2)$ — випадкове число¹, що обирається з комплексного нормального розподілу $\mathcal{CN}(0, 1/N_i)$. Сума обчислюється за всіма парами магнітних підрівнів, перехід між якими є дозволений через збуджені рівні, а q — загальне число таких пар. Середовище ми ділимо на сегменти відповідно до чисельної сітки.

На рисунку 5.10 зображено результат типового чисельного експеримента. Як бачимо, форма чисельно розрахованого SF-імпульса зберігає характерні особливості експериментальних імпульсів із рисунка 5.3: через деякий час після ввімкнення накачки спостерігаємо пік, що може супроводжуватися вторинними піками. Одночасно з піками в стоксовій моді спостерігається зменшення інтенсивності в полі накачки. Це є проявом закону збереження енергії, адже щоб віддати фотон у стоксову моду, атом має спочатку забрати фотон у поля накачки.

¹Параметри z_i, M_1, M_2 для ϱ вказуємо для того, щоб підкреслити, що для кожної координати z_i та пари магнітних квантових чисел M_1, M_2 число ϱ обирається з нормального розподілу наново.

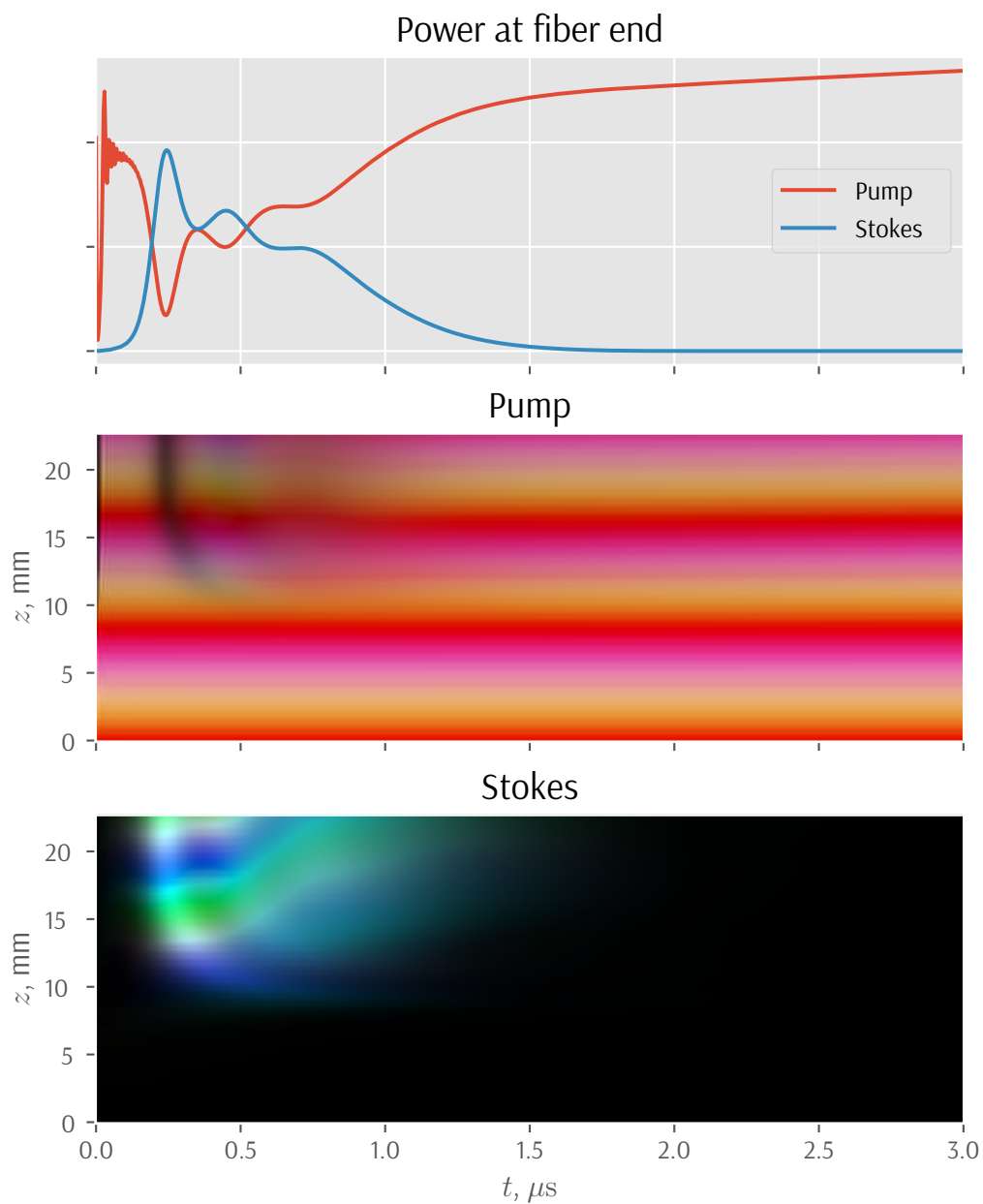


Рисунок 5.10: Типовий результат чисельного експеримента. Параметри розрахунку: $\Omega_p = 6\Gamma$, $\Delta = 27.3\Gamma$, $N = 3.87 \times 10^5$. На **другому та третьому графіках** показано просторовий розподіл та часову еволюцію відповідних полів. Поляризаційні характеристики світла – кут нахилу еліпса ϕ , ступінь еліптичності ε та амплітуду E – зображено **кольором** у колірній моделі HSV за формулою (5.20).

Кольором на просторово-часових графіках позначено поляризацію. Для цього використовуємо колірний простір HSV і позначаємо кут нахилу поляризації як колірний тон, еліптичність як насиченість кольору, а амплітуду поля — як яскравість:

$$H = 2 \cdot \phi, \quad S = 1 - |\varepsilon|, \quad V \propto E. \quad (5.20)$$

Таким чином, чисті кольори веселки позначають чисті лінійні поляризації: горизонтальна $E_y = 0$ позначається червоним кольором (#ff0000 у шістнадцяткових позначеннях RGB), а вертикальна $E_x = 0$ — блакитним (#00ffff). Кажучи більш загально, протилежні кольори, тон H яких відрізняється на 180° , відповідають ортогональним поляризаціям. Відтінки ж сірого, для яких насиченість S дорівнює нулю, відповідають чисто круговим поляризаціям незалежно від напрямку.

Смугаста структура, яку найкраще видно на графіку поля накачки, є наслідком подвійного заломлення у волокні. Як бачимо, кольори графіків для поля накачки та стоксового поля є протилежними: наприклад, у кінці волокна поле накачки має малиновий колір, а стоксове — зелений. Це означає, що їхні поляризації є ортогональними, тому в експерименті їх можна просто розділити за допомогою PBS. В іншому випадку розділювати поля за частотою було б експериментально складно, бо вони, маючи частоти по 377 THz, відрізняються всього на 6 GHz [180].

Повторюючи логіку експериментальних досліджень, дослідимо тепер залежність параметрів SF-імпульса від кількості атомів N . Отриману залежність представлено на рисунку 5.11 На графіках можна виділити чотири різних режими:

1. $N \lesssim 3 \times 10^4$ — підсилене спонтанне випромінення, за якого макроскопічний дипольний момент не утворюється, а кожен атом просто реагує на моментальне значення навколишнього поля [250];
2. $3 \times 10^4 \lesssim N \lesssim 9 \times 10^4$ атомів — перехідний режим між підсилим спонтанним випроміненням і класичною SF, за якого з'являється затримка між увімкненням накачки та випроміненням стоксового імпульса;
3. $9 \times 10^4 \lesssim N \lesssim 2.5 \times 10^5$ — класична SF, за якої затримка SF-імпульса та його ширина є обернено пропорційними до кількості атомів, повна енергія («площа») імпульса є прямо пропорційною, а максимальна інтенсивність зростає квадратично;
4. $N \gtrsim 2.5 \times 10^5$ — насичена SF, на якій зупинимось більш детально.

Насичення відбувається через те, що енергія накачки витрачається на спонтанне випромінення та власне на генерацію SF-імпульса. У режимі насиченої SF на перший імпульс витрачається вся енергія накачки, і тому додавання нових атомів

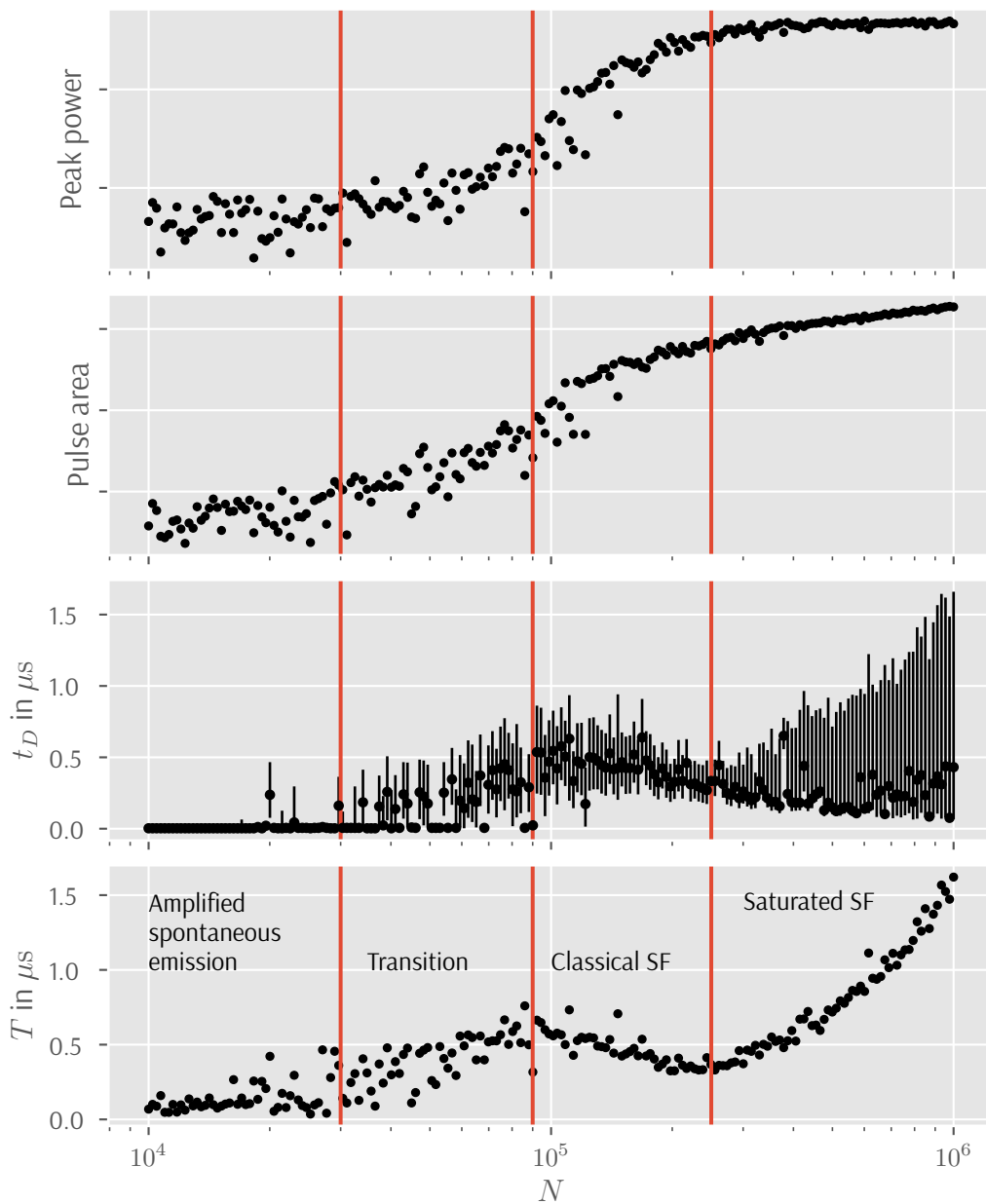


Рисунок 5.11: Залежність максимальної потужності, повної енергії, затримки t_D та ширини T SF-імпульса в залежності від кількості атомів N при $\Omega_p = 6\Gamma$ та $\Delta = 26.4\Gamma$. Лінії похибок на графіку t_D охоплюють проміжок часу, протягом якого потужність стоксового поля більша за половину від максимальної, тобто **FWHM** імпульса.

більше не посилює інтенсивність імпульса та не зменшує його затримку. Іншими словами, атомів у середовищі настільки багато, що у полі накачки не вистачає фотонів, щоб їх усі збудити. Тим не менше, повна енергія SF-імпульса продовжує зростати, але вже не через підсилення першого імпульса, а через підсилення наступних піків. Зручним показником, за яким надалі відокремуватимемо класичну SF від насиченої, оберемо середню тривалість імпульса. Її обчислюватимемо як відношення повної енергії імпульса до максимальної потужності:

$$T = \frac{\int_0^\infty P_s(t) dt}{\max_t P_s(t)}. \quad (5.21)$$

Грубо кажучи, ми наближаємо SF-імпульс трикутником або трапецією, і тоді T буде довжиною його або її середньої лінії.

Залежність T від N показано на нижньому графіку на рисунку 5.11. Зручність цього параметра полягає в тому, що він під час насичення не просто зростає повільніше чи виходить на константу, а змінює знак похідної: у режимі класичної SF він зменшується обернено пропорційно до N , а після насичення починає лінійно зростати.

Насичення SF можна описати за допомогою MCN. Під час аналізу експериментальних результатів ми обчислювали його в умовах стаціонарного стану, а втрати енергії на генерацію SF-імпульса враховували феноменологічно, додаючи вільний параметр β . Тут ми визначимо MCN більш точно, але результат не піддаватиметься аналітичному обчисленню. Щоб урахувати часову залежність, ми усереднюватимемо не тільки за простором, а і за часом:

$$\text{MCN} = \eta_{\text{inh}} \cdot \int_0^N \frac{\langle \Gamma_R \rangle_t}{\Gamma_R(\mathcal{N}=0)} d\mathcal{N}. \quad (5.22)$$

Усереднення за часом робитимемо до першого піка:

$$\langle \Gamma_R \rangle_t = \int_0^{t_D} \Gamma_R(\mathcal{N}, t) \frac{dt}{t_D}. \quad (5.23)$$

У знаменнику (5.22) Γ_R не змінюється з часом, тому усереднювати немає потреби.

Ми обрали інтервал усереднення до першого піка, бо за допомогою MCN можна теоретично описувати тільки характеристики першого піка. На пізніших часах атоми з числа MCN переходять у темний стан, і в SF-процес вступають ті атоми, що були початково затінені.

Оскільки Γ_R пропорційна до потужності накачки, то формулу 5.22 можна виразити через енергію поля накачки:

$$\text{MCN} = \eta_{\text{inh}} \cdot \int_0^N \frac{W_p(\mathcal{N})}{W_p(\mathcal{N}=0)} d\mathcal{N}, \quad (5.24)$$

де $W_p(\mathcal{N})$ — енергія накачки після проходження \mathcal{N} атомів за час до спостереження першого SF-піка в кінці волокна:

$$W_p(\mathcal{N}) = \int_0^{t_D} P_p(t) dt. \quad (5.25)$$

Диференціюючи формулу (5.24) за MCN, отримуємо

$$\eta_{\text{inh}} W_p(\mathcal{N}) d\mathcal{N} = W_p(0) d(\text{MCN}). \quad (5.26)$$

Залежність $W_p(\mathcal{N})$ можна визначити, використовуючи закон збереження енергії: вона витрачається, по-перше, на лінійне поглинання за законом Бугера-Ламберта-Бера, а по-друге, на генерацію SF-імпульса:

$$dW_p = -\alpha W_p d\mathcal{N} - dW_s. \quad (5.27)$$

З останніх двох формул отримуємо

$$dW_p = -\frac{\alpha}{\eta_{\text{inh}}} W_p(0) d(\text{MCN}) - dW_s. \quad (5.28)$$

Після інтегрування маємо

$$W_p = W_p(0) - \frac{\alpha}{\eta_{\text{inh}}} W_p(0) \cdot \text{MCN} - W_s. \quad (5.29)$$

За повного насичення енергію W_p повністю вичерпано, тому для максимально можливого MCN маємо

$$W_p(0) - \frac{\alpha}{\eta_{\text{inh}}} W_p(0) \cdot \text{MCN}_{\text{max}} - W_s = 0. \quad (5.30)$$

Енергію стоксового поля W_s ми визначаємо аналогічно до W_p :

$$W_s(\mathcal{N}) = \int_0^{t_D} P_s(\mathcal{N}, t) dt. \quad (5.31)$$

Оскільки MCN відтворює класичну залежність характеристик першого SF-піка від кількості атомів, то залежність W_s від MCN нам відома: ми можемо проінтегрувати за часом залежність² [235, eq. 6.59]:

$$P_s(\text{MCN}, t) = \frac{\hbar\omega \cdot \text{MCN}}{4T_R \cosh^2\left(\frac{t-t_D}{2T_R}\right)}. \quad (5.32)$$

²Оригінальна формула наводиться в джерелі як формула для інтенсивності, але має розмірність потужності. Причому в оригінальній формулі потужність є вдвічі більшою, ніж тут (у знаменнику замість 4 записано 2), через що повна енергія в позначеннях дисертації $\int_0^\infty P_s(t) dt = 2\hbar\omega \cdot \text{MCN}$, тобто вдвічі більша за очікуване значення $\hbar\omega \cdot \text{MCN}$.

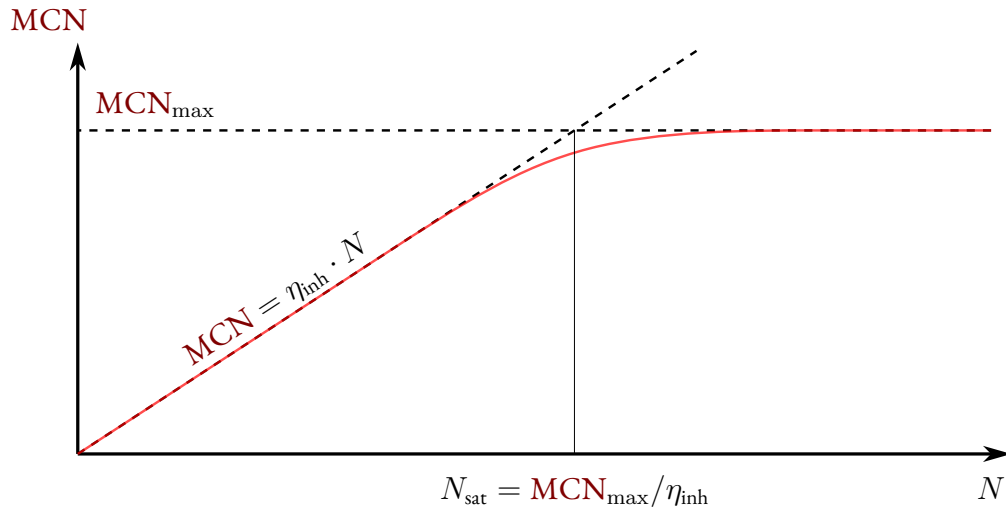


Рисунок 5.12: Схематичний графік залежності $MCN(N)$ (червона лінія). Пунктирними лініями зображено асимптотичні залежності для класичної SF ($N \ll N_{sat}$), де MCN зростає пропорційно до N , та повного насичення ($N \gg N_{sat}$), де MCN не залежить від N . Критичну кількість атомів N_{sat} знаходимо як точку перетину двох асимптотичних залежностей.

Оскільки ця форма імпульса є симетричною відносно t_D , то в кінці волокна маємо $W_s = \hbar\omega \cdot MCN/2$, тому для повного насичення

$$W_p(0) - \frac{\alpha}{\eta_{inh}} W_p(0) \cdot MCN_{max} - \frac{\hbar\omega \cdot MCN_{max}}{2} = 0. \quad (5.33)$$

Далі знайдемо критичну кількість атомів N_{sat} , за якої відбувається перехід від класичної SF до насиченої. За класичної SF маємо $MCN = \eta_{inh} N$, а за насиченої MCN не залежить від N і дорівнює MCN_{max} . Критичне число атомів N_{sat} шукатимемо як точку перетину цих двох граничних залежностей, як показано на рисунку 5.12: $N_{sat} = MCN_{max} / \eta_{inh}$. Звідси маємо рівняння відносно N_{sat} :

$$W_p(0) - \alpha W_p(0) \cdot N_{sat} - \eta_{inh} \frac{\hbar\omega \cdot N_{sat}}{2} = 0. \quad (5.34)$$

Енергію накачки W_p обчислюємо як добуток потужності на затримку першого піка:

$$W_p = P_p t_D. \quad (5.35)$$

Підставляючи середнє значення t_D з формули (5.1), швидкість спонтанного випромінювання в ефективній TLS із формули (5.2), а також пригадуючи, що потужність накачки пропорційна до квадрата частоти Рабі, ми маємо

$$W_p = \frac{P_0}{2\mu\Gamma} \cdot \frac{\Gamma^2 + 4\Delta^2}{\Gamma^2} \cdot \frac{\log^2(\sqrt{2\pi N_{sat}})}{N_{sat}}, \quad (5.36)$$

де P_0 — потужність, що відповідає частоті Рабі $\Omega_p = \Gamma$. Таким чином, енергія, що передається системі до першого SF-піка, не залежить від потужності накачки, проте залежить від її відстройки.

Підставляючи отриманий вираз для енергії, а також відстроєну OD на атом $\alpha = \alpha_0 \Gamma^2 / (\Gamma^2 + 4\Delta^2)$, маємо рівняння

$$\frac{P_0}{\mu\Gamma} \cdot \frac{\log^2(\sqrt{2\pi N_{\text{sat}}})}{N_{\text{sat}}} \left(\frac{\Gamma^2 + 4\Delta^2}{\Gamma^2} - \alpha_0 N_{\text{sat}} \right) - \eta_{\text{inh}} \hbar\omega N_{\text{sat}} = 0. \quad (5.37)$$

Коефіцієнт η_{inh} ми, на відміну від експериментальних досліджень, обчислюємо, використовуючи [250]:

$$\eta_{\text{inh}} = 1 - A \sqrt{\frac{t_D}{N\mu\Gamma}} = 1 - A\gamma \frac{\log(2\pi N_{\text{sat}})}{4\Gamma_R\mu N_{\text{sat}}} \quad (5.38)$$

де A — вільний параметр, для якого шляхом порівняння з чисельними результатами отримано значення $A = 4.0$.

Таким чином, маємо

$$\frac{P_0}{\mu\Gamma} \cdot \frac{\log^2(2\pi N_{\text{sat}})}{4} \left(\frac{\Gamma^2 + 4\Delta^2}{\Gamma^2} - \alpha_0 N_{\text{sat}} \right) - \left(N_{\text{sat}} - A\gamma \frac{\log(2\pi N_{\text{sat}})}{4\Gamma_R\mu} \right) \cdot \hbar\omega N_{\text{sat}} = 0. \quad (5.39)$$

Це рівняння не має аналітичного розв'язку, тож розв'яжемо його наближено методом послідовних наближень. Для нульового наближення ми знехтуємо втратами на генерацію SF-імпульса та отримаємо

$$N_0 = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha_0} \cdot \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + \Delta^2}. \quad (5.40)$$

Для наступних наближень N_i ми підставлятимемо попередні N_{i-1} тільки в логарифми та розв'язуватимемо рівняння

$$\frac{P_0}{\mu\Gamma} \cdot \frac{\log^2(2\pi N_{i-1})}{4} \left(\frac{\Gamma^2 + 4\Delta^2}{\Gamma^2} - \alpha_0 N_i \right) - \left(N_i - A\gamma \frac{\log(2\pi N_{i-1})}{4\Gamma_R\mu} \right) \cdot \hbar\omega N_i = 0. \quad (5.41)$$

Це рівняння є квадратним із коефіцієнтами

$$a = -\hbar\omega, \quad b = -\alpha_0 V + \hbar\omega \cdot A \frac{\gamma}{4\Gamma_R\mu} \log(2\pi N_{i-1}), \quad c = \frac{\Gamma^2 + 4\Delta^2}{\Gamma^2} V, \quad (5.42)$$

$$V = \frac{P_0}{\mu\Gamma} \log^2 \sqrt{2\pi N_{i-1}}, \quad (5.43)$$

для якого ми обираємо «фізичний» корінь

$$N_i = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (5.44)$$

Накладаючи обчислену таким чином залежність $N_{\text{sat}}(\Delta)$ на обрахований чисельно графік залежності $T(\Delta, N)$ (рисунок 5.13) ми бачимо, що графік N_{sat} , у якому враховано всі чинники (лінійне поглинання, втрати енергії на генерацію SF-імпульса та, за наявності, розфазування γ), приблизно співпадає з мінімумом тривалості T . Це підтверджує те, що обчислена таким чином N_{sat} є межею між класичним та насиченим режимами SF.

5.10 Висновки до розділу 5

У розділі експериментально та чисельно досліджено явище суперфлуоресценції в неупорядкованому ансамблі лазерно охолоджених атомів усередині порожнистого волокна.

- В експерименті спостерігалось підсилення спонтанного випромінення на більш як два порядки для кількості атомів $N \lesssim 2.2 \times 10^5$. Запропоновано просту феноменологічну модель, що використовує поняття максимального колективного числа атомів (MCN) як ефективної кількості атомів, які беруть участь в SF-процесі. Показано, що введення MCN дозволяє відтворити експериментальні залежності для неоднорідного середовища, використовуючи теоретичні залежності, характерні для однорідно збуджених середовищ.
- Проведено чисельне моделювання експериментів із урахуванням магнітних підрівнів рубідію-87, поляризації світла та подвійного заломлення всередині порожнистого волокна. Це дозволило дослідити значно ширший діапазон кількостей атомів i , як наслідок, виявити перехід від посиленого спонтанного випромінення до класичної SF, а також вивчити специфічний режим насичення SF.
- Отримані результати поглиблюють розуміння впливу різних неоднорідностей на колективне розсіювання у великих порівняно з довжиною хвилі атомних ансамблях. Це може мати застосування в таких галузях, як астрофізика [251], фізика твердого тіла [252, 253], квантова електродинаміка хвилеводів [254], атомні годинники [255, 256] та квантова оптика [257].
- Розроблені експериментальні і чисельні методики вивчення SF можуть стати основою для подальших досліджень інших типів систем із неоднорідностями, щоб визначити межливості підтримки колективного розсіювання.

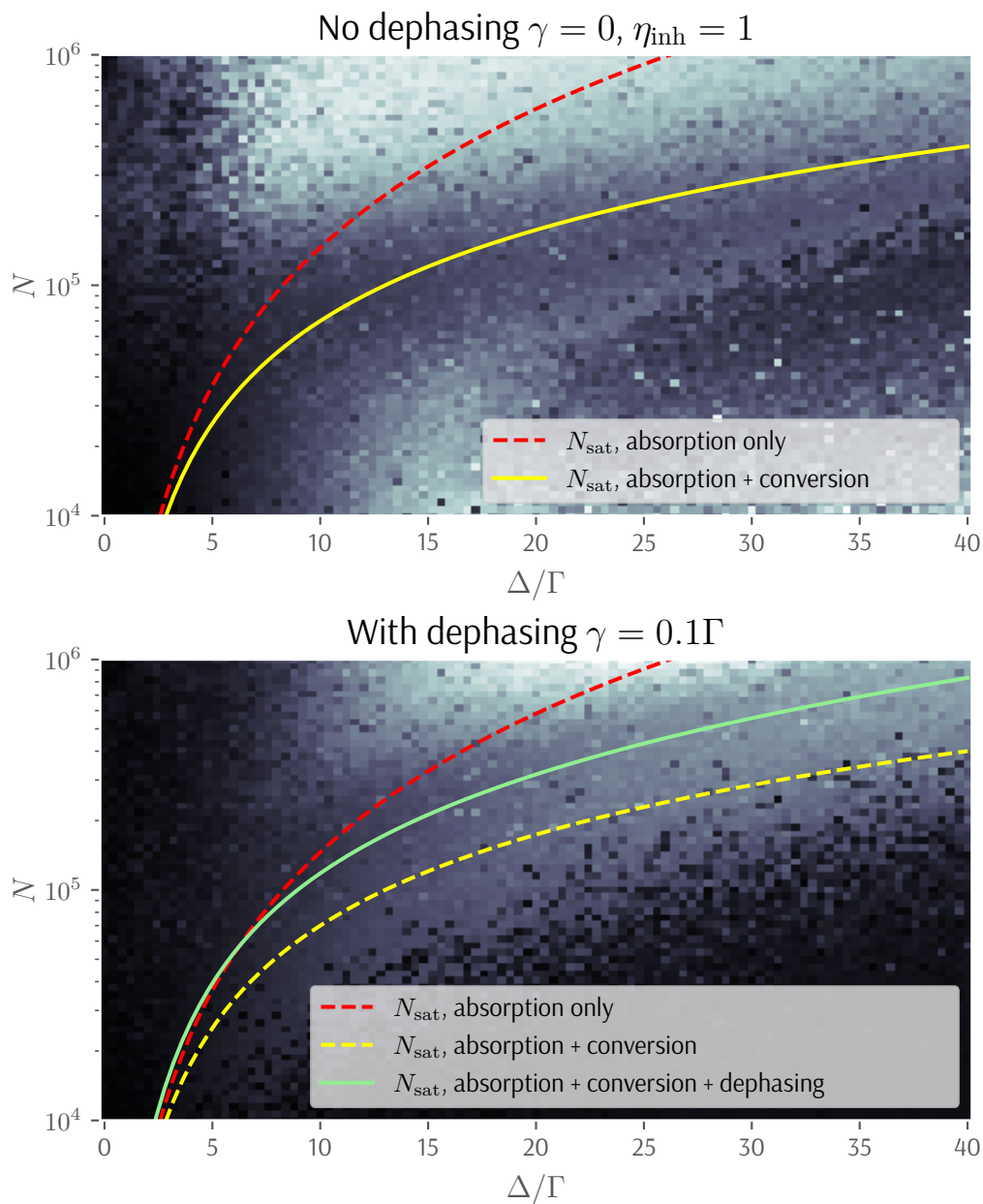


Рисунок 5.13: Тривалість SF-імпульса T в залежності від Δ та N . Лініями позначено критичну кількість атомів N_{sat} , за якої класична SF переходить у насичену, з урахуванням різних чинників: **червоною** – тільки лінійного поглинання, **жовтою** – лінійного поглинання та втрат на генерацію SF-імпульса, **зеленою** – лінійного поглинання, втрат на генерацію та неоднорідного уширення η_{inh} .

Розділ 6

Джерело одиночних фотонів на основі одномодового резонатора

У цьому розділі ми опишемо теоретичне дослідження джерела одиночних фотонів на основі одномодового резонатора з втратами. Це дослідження було виконано в Міждисциплінарній лабораторії Карно Університету Бургундії (фр. *Laboratoire Interdisciplinaire Carnot de l'Université de Bourgogne*) під керівництвом професора Стефана Герана (фр. *Stéphane Guérin*) у рамках проєкту LIMQUET і опубліковано в журналі *Physical Review Research* [14].

6.1 Вступ

Ключовим аспектом застосування джерел одиночних фотонів у квантових обчисленнях і квантовій комунікації є контроль над частотою та часовою формою випроміненого фотона для забезпечення взаємодії з одноатомним чи багатоатомним квантовим вузлом [258—263]. Цей контроль зазвичай досягається за допомогою керуючих лазерних імпульсів. Останні дослідження показали, що формою однофотонних хвильових пакетів у лямбда-системах можна керувати за допомогою резонансного вимушеного раманівського процесу [264—267].

На сьогодні квантова електродинаміка резонаторів (англ. *cavity quantum electrodynamics*, cQED), що досліджує взаємодію одиночних атомів з одномодовими резонаторами [268—271], є досить ґрунтовно розроблена. Однак спроби застосувати цю теорію до резонаторів з втратами призвели до неправильної інтерпретації в нанофотоніці [272]. Головною причиною цього є некоректне використання моделей, розроблених для високочастотних резонаторів, замість того, щоб описувати експеримент повністю квантовомеханічно [273, 274].

Зазначені моделі було створено з використанням феноменологічного підходу, в якому втрати пояснюються взаємодією резонатора з континуумом мод середо-

вища, що призводить до розширення смуги резонатора [259]. Отже, виникає потреба в розробці теорії втрат, яка б виходила з перших принципів, навіть для високодобротних резонаторів. Такий підхід дозволить більш чітко зрозуміти межі застосовності феноменологічних моделей.

У цьому розділі розглядається система, яка складається з резонатора з одним ідеальним та одним напівпрозорим дзеркалом, який взаємодіє з напівнескінченим одновимірним середовищем. Аналіз починається з повного квантування істинних мод у цій системі, після чого визначаються ефективні моделі для керуваного лазером атома в такому резонаторі. Для цього вводяться основні поняття, такі як потоки фотонів, оператори введення-виведення, квантований вектор Пойнтінга, фотонні хвильові пакети та стани, специфічні для цієї фізичної ситуації [269—271]. Із перших принципів виводиться внутрішньо-зовнішнє представлення (англ. *inside-outside representation*), що дозволяє описувати фотон, який виходить із резонатора у середовище, як у часі, так і в просторі.

Подальший аналіз полягає у порівнянні динаміки, отриманої в кожному з трьох представлень: істинно-модовому, псевдомодовому та внутрішньо-зовнішньому. Далі розроблена теорія застосовується для нерезонансної схеми з трирівневим атомом у резонаторі та демонструється, що вона дозволяє легко створювати фотони бажаної хвильової форми на вимогу. Це досягається за умови конкретного режиму взаємодії, який забезпечує утворення фотона без заселення квантового стану резонатора. Отриманий фотон має велику ширину спектру, що може мати перевагу при взаємодії з речовинами різних спектрів.

6.2 Гамільтоніан у картині Шредінгера

Розглянемо один лямбда-атом із нижнім станом $|g\rangle$, метастабільним $|f\rangle$ і верхнім $|e\rangle$, що знаходиться в резонаторі, який підтримує з частотою ω_c . Перехід $|f\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ з частотою ω_{ef} і дипольним моментом d_{fe} є близьким за частотою до моди резонатора з площею перерізу \mathcal{A} і довжиною L , із відстройкою $\Delta_c = \omega_{ef} - \omega_c$. Перехід $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ з частотою ω_{eg} і дипольним моментом d_{ge} керується класичним лазерним полем $\mathcal{E}(t) \cos(\omega_0 t + \phi)$, що відповідає залежній від часу частоті Рабі $2\hbar\Omega_t = -\mathcal{E}(t)d_{ge}$, і має відстройку $\omega_{eg} - \omega_0 = \Delta$. Вважаємо резонатор плоским (типу Фабрі-Перо), але достатньо великим за площею дзеркал, щоб спонтанним випроміненням у перпендикулярних напрямках можна було знехтувати. Таким чином, задачу можна вважати одновимірною.

6.2.1 Істинно-модове представлення

Процедура повного квантування [275—279] розглядає резонатор разом із оточенням як єдине ціле і працює у представленні істинних мод такої замкнутої систе-

ми (рисунок 6.1 (а)). Резонатор має такий само вигляд, як і в [276]: ліве дзеркало є ідеальним, а праве є напівпрозорим і складається з одного діелектричного шару. Товщину цього шару вважаємо малою в порівнянні з довжиною резонатора L . Для такої системи ми можемо записати гамільтоніан у системі відліку, що визначається унітарним оператором $U_{RW} = e^{-i\omega_0 t} \sigma_g + \sigma_e + \sigma_f$:

$$\tilde{H}(t) = H_A(t) + H_{\text{int}} + H_E, \quad (6.1a)$$

$$H_A(t) = \hbar(\Delta - \Delta_c - \omega_c)\sigma_f + \hbar\Delta\sigma_e + \hbar\Omega(\sigma_{ge} + \sigma_{eg}), \quad (6.1b)$$

$$H_E = \int_0^\infty \hbar\omega a_\omega^\dagger a_\omega d\omega, \quad (6.1c)$$

$$H_{\text{int}} = i\hbar \int_0^\infty (\eta(\omega)a_\omega\sigma^+ - \eta^*(\omega)a_\omega^\dagger\sigma) d\omega, \quad (6.1d)$$

де $H_A \equiv H_A(t)$ — гамільтоніан атома в наближенні RWA. Тут використовуються оператори $\sigma_{ij} \equiv |i\rangle\langle j|$, $\sigma_i \equiv \sigma_{ii}$, $\sigma \equiv \sigma_{fe}$. Оператори a_ω та a_ω^\dagger — відповідно оператори знищення та створення фотона в моді системи з частотою ω , для котрих виконується комутаційне співвідношення

$$[a_\omega, a_{\omega'}^\dagger] = \delta(\omega - \omega'). \quad (6.2)$$

H_{int} представляє взаємодію між атомом та середовищем із потенціалом взаємодії¹

$$\eta(\omega) = i\sqrt{\frac{\omega}{\hbar\epsilon_0\pi c\mathcal{A}}} d_{fe} e^{i\frac{\omega}{c}L} \sin\left(\frac{\omega}{c}(x_A + L)\right) T(\omega) \quad (6.3)$$

де x_A — координата атома, а $T(\omega)$ — функція відгуку резонатора [275—277]:

$$T(\omega) = \frac{t(\omega)}{1 + r(\omega)e^{2i\frac{\omega}{c}(L + \frac{\delta}{2})}}, \quad (6.4)$$

$$E_{in}(x) = \int_0^\infty \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\pi c\mathcal{A}\epsilon_0}} \sin\left[\frac{\omega}{c}(x + L)\right] e^{i\frac{\omega}{c}L} T(\omega) a_\omega + \text{conj.}, \quad (6.5)$$

де $t(\omega)$ та $r(\omega)$ — спектральні коефіцієнти пропускання та відбиття:

$$|t(\omega)|^2 + |r(\omega)|^2 = 1, \quad (6.6)$$

$$t(\omega)r^*(\omega) + t^*(\omega)r(\omega) = 0, \quad (6.7)$$

що мають вигляд

$$t(\omega) = \frac{(1 - r^2)e^{i(n-1)\frac{\omega}{c}\delta}}{1 - e^{2in\frac{\omega}{c}\delta}r^2}, \quad (6.8)$$

$$r(\omega) = e^{-i\frac{\omega}{c}\delta} r \frac{(e^{2in\frac{\omega}{c}\delta} - 1)}{1 - e^{2in\frac{\omega}{c}\delta}r^2} = |r(\omega)| e^{i\phi_r(\omega)}, \quad (6.9)$$

¹У цьому розділі формули записані в одиницях SI.

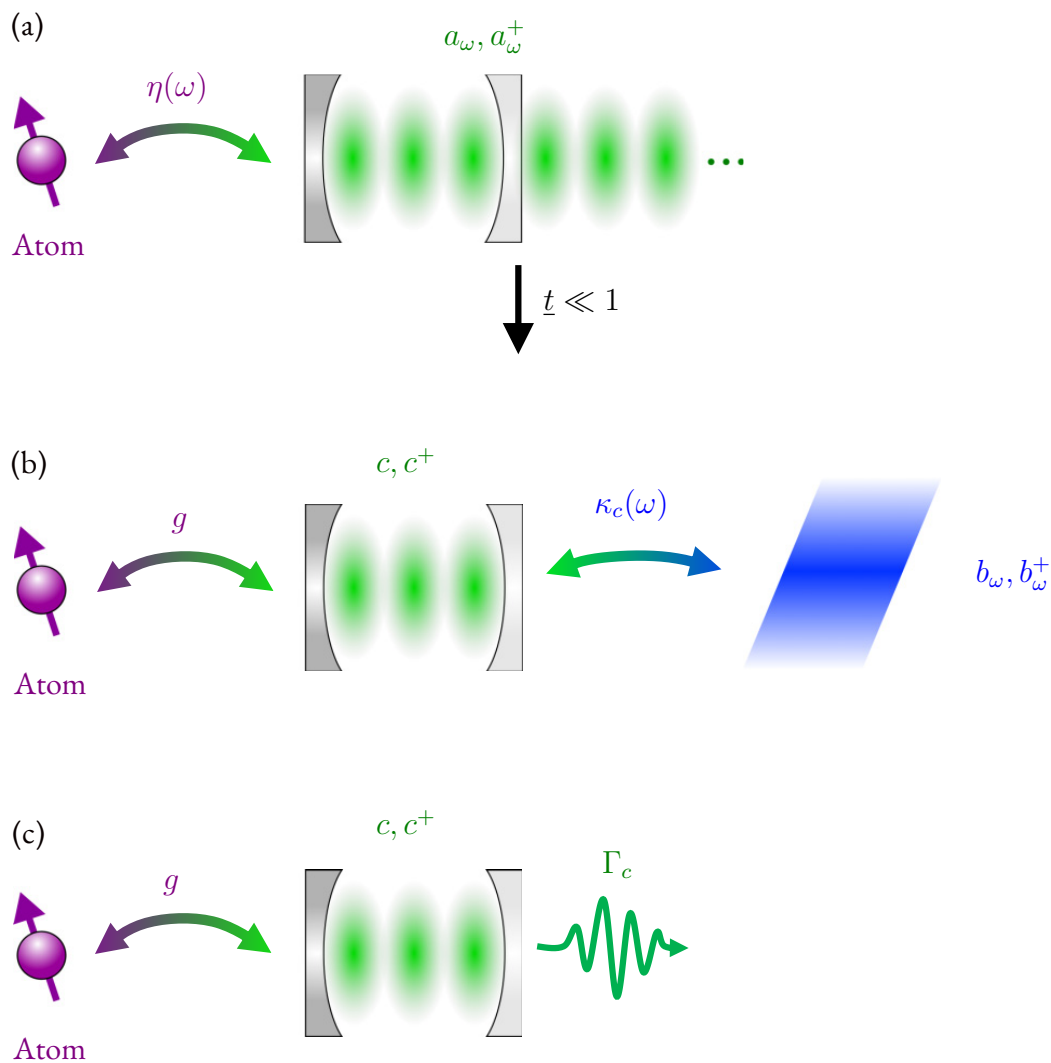


Рисунок 6.1: **(а)** Істинно-модова модель, де атом взаємодіє з полем, проквантованим як єдине ціле, але з урахуванням резонатора. Атом взаємодіє з модами a_ω цього спільного поля з енергією взаємодії $\hbar\eta(\omega)$. **(б)** Якщо резонатор є майже непрозорим, то можна перейти у *внутрішньо-зовнішнє* представлення, де моди поля є геометрично розділеними на моди резонатора c та моди зовнішнього поля b_ω , а резонатор і зовнішнє поле взаємодіють між собою з енергією $\hbar\kappa_c(\omega)$ на одиницю ширини спектра. **(с)** На відміну від перших двох представлень, у *псевдомодовому* квантовий стан резонатора взагалі не розглядається, а його вплив враховується як втрати енергії Γ_c у неермітовому гамільтоніані.

де $r = \frac{n-1}{n+1}$ — коефіцієнт відбиття дзеркала товщиною $\delta = \frac{\lambda_c}{4n}$, λ_c — власна довжина хвилі резонатора. Можна показати [275—277], що для резонатора з малим пропусканням функцію відгуку (6.4) можна переписати як суму лоренціанів:

$$|T(\omega)|^2 \approx \sum_m \frac{c}{2L} \cdot \frac{1}{(\omega - \omega_m)^2 + \left(\frac{\Gamma_m}{2}\right)^2}, \quad (6.10)$$

де

$$\Gamma_m = -\frac{c}{L} \log |r(\omega_m)|, \quad (6.11)$$

$$\omega_m = \frac{\pi c}{L} \cdot m + \frac{c}{2L} (\pi - \phi_r(\omega_m)). \quad (6.12)$$

Для резонатора з високою добротністю Q та малим пропусканням $|t(\omega)| \approx |t| \ll 1$, $\phi_r(\omega_m) \approx \pi$ лоренціани у формулі (6.10) є добре відокремлені один від одного ($\Gamma_m \ll \pi c/L$), і ми можемо поміняти місцями суму і квадратний корінь:

$$T(\omega) = \sum_m \sqrt{\frac{c}{2L}} \cdot \frac{\sqrt{\Gamma_m}}{\omega - \omega_m + i\frac{\Gamma_m}{2}}. \quad (6.13)$$

Використовуючи (6.5), можна записати гамільтоніан взаємодії між атомом і середовищем [275]: $H_{\text{int}} = -dE_{\text{in}}$, а потім, використовуючи (6.13), отримати одномодову функцію взаємодії:

$$\eta(\omega) \approx i \sqrt{\frac{\omega}{\hbar \epsilon_0 \pi c A}} d_{fe} e^{i\frac{\omega}{c} L} \sin\left(\frac{\omega}{c}(x_A + L)\right) \times \sqrt{\frac{\Gamma_c}{2\pi}} \frac{1}{\omega - \omega_c + i\frac{\Gamma_c}{2}}. \quad (6.14)$$

Для одношарового напівпрозорого дзеркала високий коефіцієнт відбиття відповідає би нереалістично великому показникові заломлення. Більш реальною моделлю є дзеркало з багатьох діелектричних шарів із різними показниками заломлення [275]. У літературі такі припущення відповідають високому факторові добротності (англ. *quality factor*) Q резонатора. Але, як ми покажемо далі, високої Q насправді недостатньо. Замість цього ми маємо вимагати високої англ. *finesse*, що теж перекладається українською як «добротність», але рахується як $F = Q \cdot \Delta\omega/\omega_c$.

У рівнянні (6.14) ми залишили тільки моду ω_c , обмеживши суму лоренціанів єдиним членом. Гамільтоніан (6.1) із потенціалом взаємодії резонатора з вільним простором (6.3) відповідає істинно-модовому представленню, де частоти є неперервні, але середовище є структурованим [280]. Далі ми розділимо ці істинні моди на внутрішні та зовнішні, що описують резонатор і вільний простір окремо.

6.2.2 Внутрішньо-зовнішнє представлення

Розглянемо тепер приблизно еквівалентну модель, де моди a_ω поділені на дві частини: моди резонатора c і континуум мод вільного простору b_ω (рисунок 6.1 (b)).

Формальний вивід цієї моделі наведено у [276]. Вона має похибку $O(|t|^2)$, де t — коефіцієнт пропускання напівпрозорого дзеркала. Це представлення можна інтерпретувати як заміну напівпрозорого дзеркала ідеальним, так що маємо ідеальний резонатор, що тим не менше взаємодіє з вільним простором [276]. Схему зв'язку між атомом і резонатором зображено на рисунку 6.2. Ми називатимемо це представлення внутрішньо-зовнішнім. Гамільтоніан у цьому представленні ми отримуємо в картині Шредінгера з використанням наближення RWA, вважаючи, що атом знаходиться в точці максимальної інтенсивності поля:

$$H(r) = H_A(t) + H_{AC} + H_C + H_{RC} + H_R, \quad (6.15a)$$

$$H_C = \hbar\omega_c c^\dagger c, \quad (6.15b)$$

$$H_{AC} = \hbar g(c^\dagger \sigma + \sigma^\dagger c), \quad (6.15c)$$

$$H_R = \int_0^\infty \hbar\omega b_\omega^\dagger b_\omega d\omega, \quad (6.15d)$$

$$H_{RC} = i\hbar \int_0^\infty (\kappa_c(\omega) b_\omega^\dagger c^\dagger - \kappa_c^*(\omega) c^\dagger b_\omega) d\omega, \quad (6.15e)$$

де $g = -d_{fe} \sqrt{\omega_c / \hbar\epsilon_0 L \mathcal{A}}$ — потенціал взаємодії атома з резонатором (однофотонна частота Рабі). Потенціал взаємодії $\eta(\omega)$ із істинно-модового представлення (6.14) можна тоді наблизити як

$$\eta(\omega) \approx \hat{\eta}(\omega) = -ig \sqrt{\frac{\Gamma_c}{2\pi}} \frac{1}{\omega - \omega_c - i\frac{\Gamma_c}{2}}. \quad (6.16)$$

У рівнянні (6.15) H_A співпадає з атомним гамільтоніаном із (6.1b), H_C та H_R — це гамільтоніани резонатора та вільного простору, а H_{RC} описує взаємодію резонатора з вільним простором. Як і в істинно-модовому представленні, оператори народження та знищення фотона у вільному просторі пов'язані комутаційними співвідношеннями

$$[b_\omega, b_{\omega'}^\dagger] = \delta(\omega - \omega'). \quad (6.17)$$

Потенціал взаємодії між резонатором і простором $\kappa_c(\omega)$ можна порахувати в наближенні малого пропускання та малої відстройки [276]:

$$\kappa_c(\omega) = -i \sqrt{\frac{\Gamma_c}{2\pi}} e^{-i\frac{\omega}{c}L} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega - \omega_c}{c}L\right). \quad (6.18)$$

Щоб вивести цю функцію, як показано у [276], спочатку потрібно визначити істинні моди системи, що складається із резонатора з напівпрозорим дзеркалом малої товщини. Потім замінити резонатор на ідеальний, але додати невідомий потенціал взаємодії з вільним простором. Порівнюючи моди двох систем, можна отримати вираз (6.18) у наближенні малого пропускання дзеркала в першій системі. Варто зазначити, що під час такого виводу в резонаторі немає атома. Тому $\kappa_c(\omega)$ описує взаємодію порожнього резонатора з порожнім вільним простором.

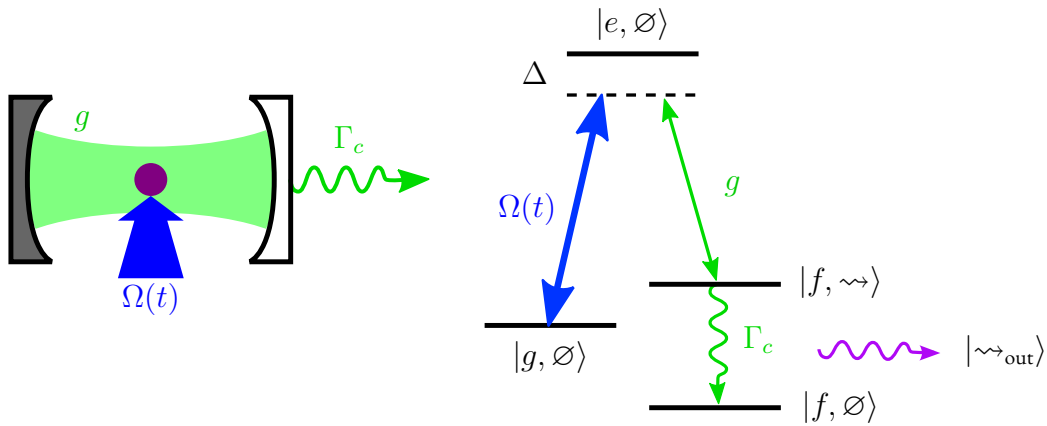


Рисунок 6.2: **Зліва:** Схема взаємодії атома з полем у резонаторі. Один лямбда-атом, керований зовнішнім класичним полем із частотою Рабі $\Omega(t)$ і квантованим полем резонатора з потенціалом взаємодії g . **Справа:** Схема рівнів системи. Поля знаходяться у двофотонному резонансі з однофотонною відстройкою $\Delta_c = \Delta$. Початково атом знаходиться на нижньому рівні $|g\rangle$. Збуджуючись, атом забирає в лазерного поля один фотон енергії і випромінює його в резонатор, і цей фотон випромінюється з резонатора через напівпрозоре дзеркало зі швидкістю Γ_c .

6.2.3 Математична неузгодженість марківської моделі

В отриманому представленні потенціал взаємодії між резонатором і вільним простором, на відміну від стандартного підходу [269], не є константою. У цьому підрозділі ми покажемо, що стандартна теорія з константним потенціалом, хоч і дає фізично точні результати, але призводить до математичних невідповідностей.

Використовуючи константний потенціал взаємодії

$$\kappa_c(\omega) \approx \sqrt{\frac{\Gamma_c}{2\pi}}, \quad (6.19)$$

та інтегруючи за частотою від $-\infty$, ми наближуємо подвійний інтеграл у (6.50), обираючи для спрощення $x = 0$, як

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t dt' \int_0^{+\infty} d\omega \frac{|\kappa_c(\omega)|^2}{\sqrt{\Gamma_c}} c(t') e^{i\omega(t-t')} \\ & \approx \sqrt{\Gamma_c} \int_{t_0}^t dt' c(t') \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \\ & = \sqrt{\Gamma_c} \int_{t_0}^t dt' c(t') \delta(t-t') \\ & = \frac{\sqrt{\Gamma_c}}{2} c(t). \end{aligned} \quad (6.20)$$

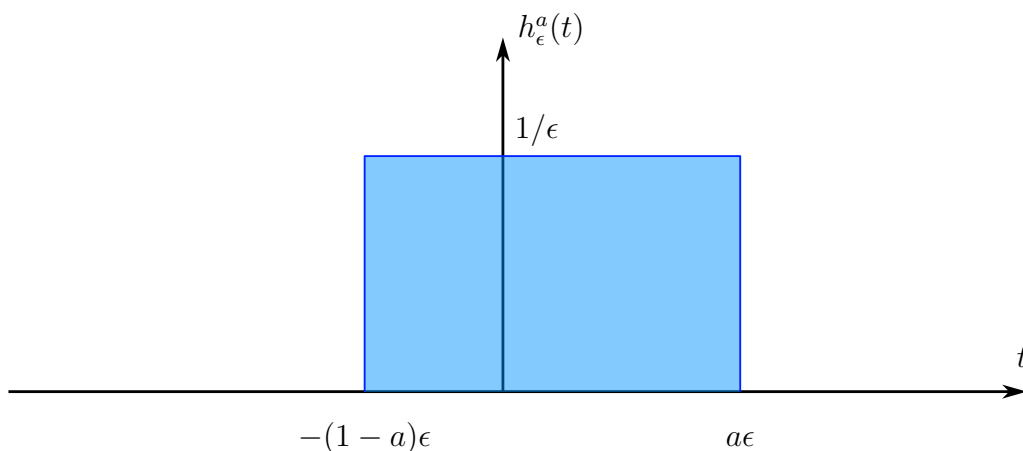


Рисунок 6.3: Прямокутний імпульс, що наближується до дельта-функції при $\epsilon \rightarrow 0$.

Останній крок, який можна простіше переформулювати як

$$\int_{-\infty}^0 c(t)\delta(t)dt = \frac{1}{2}c(0), \quad (6.21)$$

є математично невизначеним. Цей інтеграл можна поширити до $+\infty$ за допомогою функції Хевісайда $\theta(t)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} c(t)\theta(-t)\delta(t) = \int_{-\infty}^0 c(t)\delta(t), \quad (6.22)$$

але такий добуток є невизначеним, оскільки функція Хевісайда має розрив у точці, де дельта-функція є нескінченною [281].

Більш явно це можна показати, наближуючи дельта-функцію прямокутними імпульсами, зображеними на рисунку 6.3:

$$h_{\epsilon}^a(t) = \begin{cases} 1/\epsilon & \text{якщо } t \in [-(1-a)\epsilon, a\epsilon]; \\ 0 & \text{інакше,} \end{cases} \quad (6.23)$$

які параметризуються зміщенням $a \in [0, 1]$, і прямують до дельта-функції при $\epsilon \rightarrow 0$. Ми можемо це явно показати за визначенням дельта-функції:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)h_{\epsilon}^a(t)dt &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{-(1-a)\epsilon}^{a\epsilon} \phi(t)dt \\ &= \int_{-1}^a \phi(\epsilon s)ds \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-(1-a)}^a \phi(\epsilon s)ds \\ &= \phi(0). \end{aligned} \quad (6.24)$$

Зазначимо, що хоч імпульси $h_\epsilon^a(t)$ і не є парними функціями, але гранична дельта-функція є парною.

Тим не менше, беручи інтеграл (6.21), ми отримуємо

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^0 c(t) h_\epsilon^a(t) dt &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{-(1-a)\epsilon}^0 c(t) dt \\ &= \int_{-1}^0 c(\epsilon s) ds \\ &= (1-a)c(0). \end{aligned} \quad (6.25)$$

Бачимо, що результат інтегрування залежить від вибору послідовності, що прямує до дельта-функції. Результат (6.21) ми отримуємо лише тоді, коли не тільки сама дельта-функція, а й функції, що прямують до неї, є парними.

Як наслідок, вивід (6.20) у загальному випадку не є математично узгодженим. Для коректного виводу моделі необхідно явно задати залежність потенціалу взаємодії κ_c від частоти, як це було зроблено з перших принципів в основному тексті.

6.2.4 Псевдомодове представлення

Псевдомодове представлення можна визначити з [275]:

$$\tilde{H}(t) = H_A(t) + \tilde{H}_{AC} + \tilde{H}_C, \quad (6.26a)$$

$$\tilde{H}_{AC} = \hbar g(a^+ \sigma + \sigma^+ a), \quad (6.26b)$$

$$\tilde{H}_C = \hbar \left(\Delta - \Delta_c - i \frac{\Gamma_c}{2} \right) a^+ a, \quad (6.26c)$$

де для однієї моди $a^+ |\emptyset\rangle = |\rightsquigarrow\rangle$.

Це представлення виводиться безпосередньо з істинно-модової моделі з використанням наближеного потенціала взаємодії (6.16). Загалом, мода резонатора c у формулі (6.15) та a в формулі (6.26) відрізняється: c є модою ідеального резонатора, а a визначається у [275]:

$$a = \frac{1}{g} \int \hat{\eta}(\omega) \hat{a}_\omega d\omega, \quad (6.27)$$

де \hat{a}_ω — оператор знищення фотона в моді, визначеної для приблизного потенціала взаємодії $\hat{\eta}$ з рівняння (6.16).

Зазначимо, що гамільтоніан (6.26) визначено для відкритої системи, що взаємодіє з вільним простором, тому він не є ермітовим. Гамільтоніани ж (6.1) і (6.15)

описують замкнуті системи. Оператори знищення фотона a та c фізично відповідають одним і тим самим приблизним модам, але є математично виведені порізно. Далі ми проаналізуємо всі три представлення, порівнюючи динаміку кожної системи.

6.2.5 Порівняння різних представлень

Порівняймо чисельно зображені на рисунку 6.1 моделі та визначимо їхню достовірність. Для цього розглянемо в кожній із трьох моделей один атом, резонатор без фотонів і вакуумне навколишнє поле. Щоб розрізнити різні представлення, ми позначатимемо параметри в істинно-модовому представленні тильдою (\tilde{a}), а у псевдомодовому — циркумфлексом (\hat{a}).

Почнімо з істинно-модового представлення. Ми позначатимемо базисні стани як $|i, \alpha\rangle$, де $i \in \{g, e, f\}$ — стан атома, а $\alpha \in \{\emptyset, \rightsquigarrow_\omega\}$ — стан поля. Загальний вигляд хвильової функції тоді є таким:

$$|\tilde{\psi}\rangle = \tilde{c}_{g,0}(t) |g, \emptyset\rangle + \tilde{c}_{e,0}(t) |e, \emptyset\rangle + \int_0^\infty \tilde{c}_{f,1}(\omega, t) |f, \rightsquigarrow_\omega\rangle d\omega. \quad (6.28)$$

Підставляючи (6.28) у гамільтоніан (6.1), ми отримуємо таку систему рівнянь:

$$i\dot{\tilde{c}}_{g,0}(t) = \Omega\tilde{c}_{e,0}(t), \quad (6.29a)$$

$$i\dot{\tilde{c}}_{e,0}(t) = \Delta\tilde{c}_{e,0}(t) + \Omega\tilde{c}_{g,0}(t) + \int_0^\infty \eta(\omega)\tilde{c}_{f,1}(\omega, t)d\omega, \quad (6.29b)$$

$$i\dot{\tilde{c}}_{f,1}(\omega, t) = (\Delta - \Delta_c + \omega - \omega_c)\tilde{c}_{f,1}(\omega, t) - i\eta^*(\omega)\tilde{c}_{e,0}(t), \quad (6.29c)$$

де потенціал взаємодії $\eta(\omega)$ беремо з формули (6.3). Якщо ми наблизимо $\eta(\omega)$ відповідно до формули (6.16), то матимемо рівняння, схожі на (6.29) для стану

$$|\hat{\psi}\rangle = \hat{c}_{g,0}(t) |g, \emptyset\rangle + \hat{c}_{e,0}(t) |e, \emptyset\rangle + \int_0^\infty \hat{c}_{f,1}(\omega, t) |f, \rightsquigarrow_\omega\rangle d\omega, \quad (6.30)$$

де $|\rightsquigarrow_\omega\rangle = \hat{a}_\omega^+ |\emptyset\rangle$. Далі ми можемо ввести стан резонатора за формулою (6.27):

$$|\rightsquigarrow\rangle = \frac{1}{g} \int_0^\infty \hat{\eta}^*(\omega)\hat{a}_\omega^+ |\emptyset\rangle d\omega. \quad (6.31)$$

Користуючись гамільтоніаном (6.26), ми отримуємо для хвильової функції у скороченому базисі $\{|g, \emptyset\rangle, |e, \emptyset\rangle, |f, \rightsquigarrow\rangle\}$ такі рівняння:

$$i\dot{\hat{c}}_{g,0}(t) = \Omega\hat{c}_{e,0}(t), \quad (6.32a)$$

$$i\dot{\hat{c}}_{e,0}(t) = \Delta\hat{c}_{e,0}(t) + \Omega\hat{c}_{g,0}(t) + g\hat{c}_{f,1}(t), \quad (6.32b)$$

$$i\dot{\hat{c}}_{f,1}(t) = \left(\Delta - \Delta_c - i\frac{\Gamma_c}{2}\right)\hat{c}_{f,1}(t) + g\hat{c}_{e,0}(t), \quad (6.32c)$$

для хвильової функції

$$|\psi_{\text{eff}}\rangle = \hat{c}_{g,0}(t) |g, \emptyset\rangle + \hat{c}_{e,0}(t) |e, \emptyset\rangle + \hat{c}_{f,1} |f, \rightsquigarrow\rangle. \quad (6.33)$$

У внутрішньо-зовнішньому представленні, на відміну від істинно-модового, поле розділяється внутрішнє та зовнішнє. Тому ми маємо базис із дискретних станів $|g, \emptyset\rangle$, $|e, \emptyset\rangle$, $|f, \rightsquigarrow_{\text{in}}, \emptyset_{\text{out}}\rangle$, а також континууму станів $|f, \emptyset_{\text{in}}, \rightsquigarrow_{\omega, \text{out}}\rangle$, де індекси *in* та *out* позначають стан поля відповідно всередині та зовні резонатора, і ми маємо співвідношення

$$c^+ |\emptyset_{\text{in}}\rangle = |\rightsquigarrow_{\text{in}}\rangle, \quad (6.34a)$$

$$c |\rightsquigarrow_{\text{in}}\rangle = |\emptyset\rangle, \quad (6.34b)$$

$$b_{\omega}^+ |\emptyset_{\text{out}}\rangle = |\rightsquigarrow_{\omega, \text{out}}\rangle, \quad (6.34c)$$

$$b_{\omega} |\rightsquigarrow_{\omega', \text{out}}\rangle = \delta(\omega - \omega') |\emptyset_{\text{out}}\rangle. \quad (6.34d)$$

Загальний вигляд хвильової функції тоді є таким:

$$|\psi\rangle = c_{g,0}(t) |g, \emptyset\rangle + c_{e,0}(t) |e, \emptyset\rangle + c_{f,1,0}(t) |f, \rightsquigarrow_{\text{in}}, \emptyset_{\text{out}}\rangle + \int_0^{\infty} c_{f,0,1}(\omega, t) |f, \emptyset_{\text{in}}, \rightsquigarrow_{\omega, \text{out}}\rangle d\omega, \quad (6.35)$$

а рівняння часової еволюції для коефіцієнтів виглядають так:

$$i\dot{c}_{g,0}(t) = \Omega c_{e,0}(t), \quad (6.36a)$$

$$i\dot{c}_{e,0}(t) = \Delta c_{e,0}(t) + \Omega c_{g,0}(t) + g c_{f,1,0}(t), \quad (6.36b)$$

$$i\dot{c}_{f,1,0}(t) = (\Delta - \Delta_c) c_{f,1,0}(t) + g c_{e,0}(t) - i \int_0^{\infty} \kappa_c^*(\omega) c_{f,0,1}(\omega, t), \quad (6.36c)$$

$$i\dot{c}_{f,0,1}(\omega, t) = (\Delta - \Delta_c + \omega - \omega_c) c_{f,0,1}(\omega, t) + i \kappa_c(\omega) c_{f,1,0}(t). \quad (6.36d)$$

Щоб визначити межі застосовності вищенаведених наближених моделей, ми розв'язуємо чисельно системи рівнянь (6.29), (6.32) і (6.36). Для нашого аналізу не принципово, яким чином атом збуджується до стану $|e\rangle$, тому ми просто задамо цей стан як початковий і не прикладатимемо жодного поля, тобто $\Omega = 0$. Ми розглядатимемо режим, за котрого між атомом та фотоном нема осциляцій Рабі, тобто витік із резонатора є сильнішим за потенціал взаємодії між атомом і резонатором: $\Gamma_c > g$. Як ефективний гамільтоніан, так і внутрішньо-зовнішнє представлення виводяться за припущення, що резонатор є високодобротним (із високою Q), тобто $\Gamma_c \ll \omega_c$.

На рисунку 6.4 зображено результати чисельних розрахунків для резонатора з фіксованою добротністю $\omega_c/\Gamma_c \approx 1200$. Фіксуємо Q , ми тим не менше можемо змінювати коефіцієнт пропускання дзеркала і довжину резонатора. На рисунку 6.4 (а) довжина резонатора $L = \lambda_c/2$, тому атом може взаємодіяти тільки з однією модою резонатора, і його finesse співпадає з quality: $\Delta_{\omega}/\Gamma_c = 1200$.

Як бачимо, як у резонансі, так і з відстройкою спектри фотонів у псевдомодовому та внутрішньо-зовнішньому представленнях співпадають зі спектрами істинномодової моделі, отриманими за рівняннями (6.29) із точним² потенціалом взаємодії (6.3). На рисунку 6.4 (b) резонатор є довшим, а дзеркало, відповідно, більш прозорим. Щоб мати такий само потенціал взаємодії між атомом і резонатором, ми також змінили дипольний момент атома. Маючи таку само quality, як і в попередньому випадку, тепер ми маємо нижчу finesse: $\Delta\omega/\Gamma_c \approx 7$. Тому наближення потенціалу взаємодії (6.14) є менш точним, бо лоренціани кожної моди не є достатньо розділеними, щоб вважати $\sqrt{\sum f_m} \approx \sum \sqrt{f_m}$. Звернімо увагу, що це наближення використовується як у внутрішньо-зовнішньому, так і у псевдомодовому представленні, тому обидві наближені моделі відхиляються від точної. З іншого боку, як зазначено у [275], для застосовності псевдомодової моделі має виконуватись умова $(\frac{\Gamma_c}{c}(x_A + L))^2 \ll 1$. А коли ми подовжуємо резонатор, не змінюючи Γ_c , ця умова не виконується настільки добре, що погіршує результати наближених моделей. Також, як було вказано раніше, внутрішньо-зовнішнє представлення було виведено для резонаторів із майже ідеальними дзеркалами, прозорість котрих $|t|^2 = 1 - e^{-2L\Gamma_c/c} \ll 1$. Для подовженого резонатора ми маємо $|t|^2 \approx 0.58$, що не є малою величиною. Врешті-решт, навіть у резонансі $\Delta_c = 0$ ми бачимо, що спектр фотона з точної моделі є трохи зміщеним від резонансу ω_c . Це можна пояснити впливом інших мод резонатора, поєднаним із низькою його finesse.

На рисунках 6.4 (c, d) ми порівнюємо часову еволюцію фотонних станів. Тут ми порівнюємо ймовірності фотона знаходитись у резонаторі: $\hat{P}_{f,1}(t) = |\hat{c}_{f,1}(t)|^2$ у псевдомодовому та $P_{f,1,0}(t) = |c_{f,1,0}(t)|^2$ у внутрішньо-зовнішньому представленні. Як бачимо з рівнянь (6.32), амплітуда $\hat{c}_{f,1}(t)$ залежить тільки від Γ_c та g , і ці параметри не змінюються. Таким чином, $\hat{P}_{f,1}$ для високої (рисунок 6.4 (c)) та низької finesse (рисунок 6.4 (d)) не відрізняються. З іншого боку, у внутрішньо-зовнішньому представленні, потенціал взаємодії $\kappa_c(\omega)$ явно залежить від L , і через це для різних finesse маємо різні графіки.

6.3 Динаміка системи в картині Гейзенберга

У цьому підрозділі ми введемо ефективну динаміку системи з атома та резонатора, що взаємодіє з навколишнім простором, із перших принципів. Ми маємо на меті контролювати форму фотона, що випромінюється з резонатора, прикладаючи до атома зовнішнє поле. За основу для моделі візьмемо внутрішньо-зовнішнє представлення, оскільки воно дозволяє відокремити фотон, що випромінюється у вільний простір. Система має вигляд, зображений на рисунку 6.2, атом початко-

²Під час чисельного розрахунку ми використовуємо функцію відгуку $T(\omega)$ з формули (6.4), що її виведено для одношарового дзеркала з товщиною $\delta = \lambda_c/(4n)$, а атом знаходиться за координатою $x_a = -L/2$.

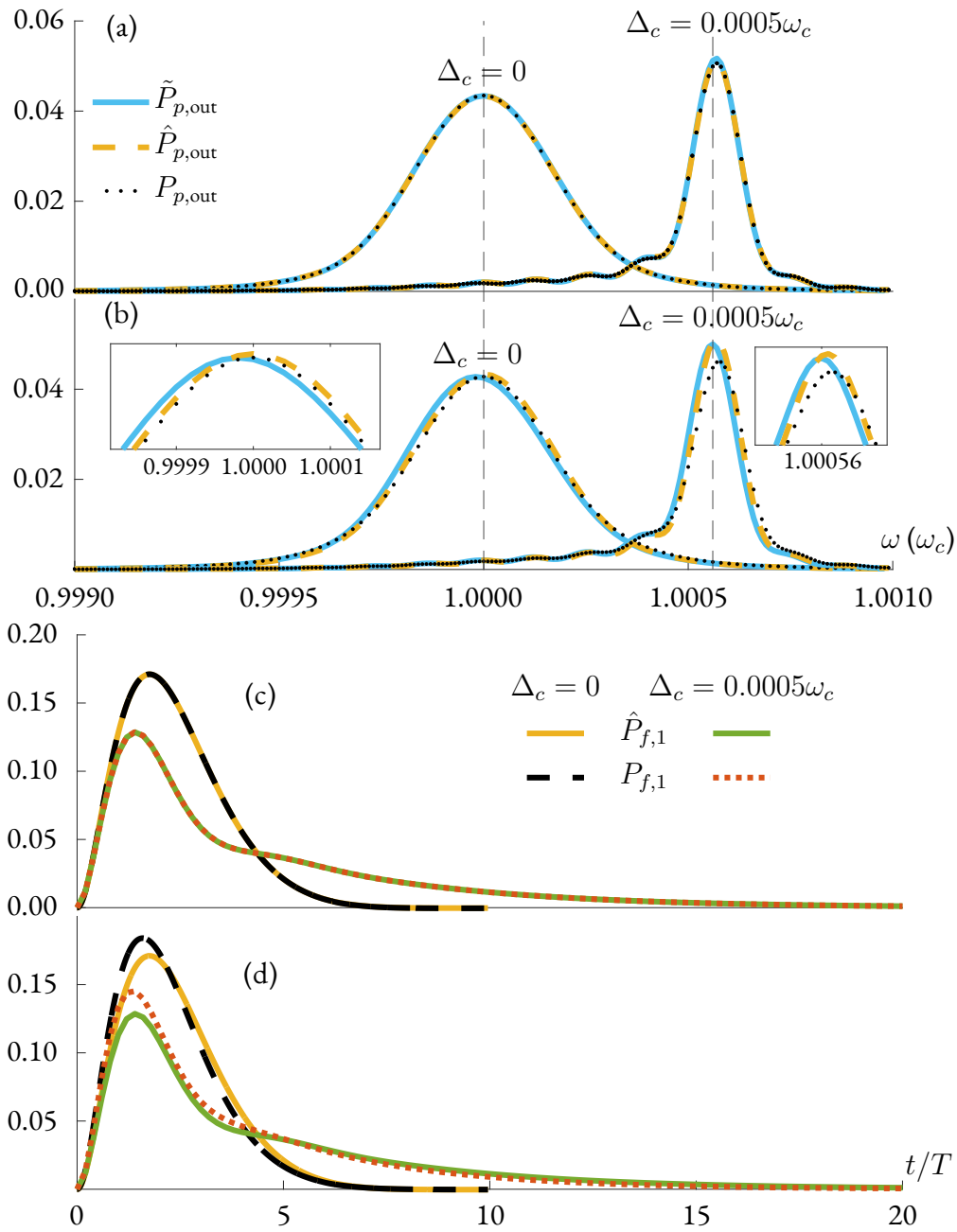


Рисунок 6.4: Форма фотона, розрахована в істинно-модовому (\tilde{P}), внутрішньо-зовнішньому (P) та псевдомодовому (\hat{P}) представленнях. **(a), (b)** Спектри фотонів для параметрів резонатора $|g| = 0.6/T$, $\Gamma_c = 2/T$, $\omega_c = 2416/T$, де $\omega_c = m \frac{2\pi c}{L}$, m – кількість пучностей у резонаторі. На графіку **(a)** час запису спектра $t_f = 10T$, $\Gamma_c = 2/T$, довжина резонатора $L = \lambda_c/2$ (тобто $m = 1$), показник заломлення $n = 27.735$, тому $|t|^2 \approx 0.005$. На графіку **(b)** $t_f = 20T$, $L = 165\lambda_c/2$, $n = 2.1756$, $\Gamma_c = 2/T$, отже $|t|^2 \approx 0.58$. **(c), (d)** Часові профілі фотонів, обчислені за тих само параметрів, що і відповідно **(a)** та **(b)**.

во знаходиться в стані $|g\rangle$, і ми розглядаємо двофотонний резонанс $\Delta = \Delta_c$, тому $\omega_{gf} = \omega_c - \omega_0$. Ми введемо вектор Пойнтінга в істинно-модовому представленні в картині Гейзенберга. Ми могли б узяти вектор Пойнтінга зі [282] і додати до нього резонатор, але, як покажемо нижче, виведений із перших принципів вектор Пойнтінга виглядатиме інакше. Далі ми створимо ефективну модель у два кроки: спочатку визначимо потік випромінених фотонів, що пов'язаний із гейзенбергівською еволюцією оператора $c^\dagger c$, а потім випишемо рівняння еволюції для матриці густини системи «атом і резонатор», усереднюючи за степенями свободи вільного простору, що дозволить виконувати квантове усереднення.

6.3.1 Рівняння часової еволюції для операторів

Почнімо з того, що введемо в картині Гейзенберга рівняння руху для операторів $b_\omega(t) = U^+(t, t_0)b_\omega U(t, t_0)$, де $U(t, t_0)$ — пропатор повного гамільтоніана $H(t)$, що в картині Гейзенберга має вигляд $H^{(H)}(t) = U^+(t, t_0)H(t)U(t, t_0)$. З рівняння Гейзенберга $\dot{\mathcal{O}}^{(H)} = -\frac{i}{\hbar} [\mathcal{O}^{(H)}(t), H^{(H)}(t)]$ для оператора \mathcal{O} , що в картині Шредінгера не залежить від часу (в картині Гейзенберга він залежить від часу як $\mathcal{O}^{(H)}(t) = U^+(t, t_0)\mathcal{O}U(t, t_0)$), ми випишемо рівняння Гейзенберга-Ланжевена:

$$\dot{b}_\omega(t) = -i\omega b_\omega(t) + \kappa_c(\omega)c(t), \quad (6.37a)$$

$$\dot{c}(t) = -i\omega_c c(t) - \int_0^\infty \kappa_c^*(\omega)b_\omega(t)d\omega - ig\sigma(t). \quad (6.37b)$$

Тут і далі ми опускатимемо позначку картини Гейзенберга $^{(H)}$.

Енергію фотонів, що їх випромінює резонатор, можна описати оператором вектора Пойнтінга. Використовуючи його означення [276, 282], запишемо його оператор в істинно-модовому представленні, використовуючи моди зовні резонатора [275—277]:

$$S(x) = -\frac{1}{2\mu_0} (B_{\text{out}}(x)E_{\text{out}}(x) + E_{\text{out}}(x)B_{\text{out}}(x)), \quad (6.38)$$

де μ_0 — магнітна стала, E_{out} та B_{out} — оператори полів:

$$E_{\text{out}}(x) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi c\mathcal{A}}} \int_0^\infty \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0}} (R_\omega e^{i\frac{\omega}{c}x} - e^{-i\frac{\omega}{c}x}) a_\omega + \text{conj.}, \quad (6.39)$$

$$B_{\text{out}}(x) = \frac{i}{c\sqrt{2\pi c\mathcal{A}}} \int_0^\infty \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0}} (R_\omega e^{i\frac{\omega}{c}x} + e^{-i\frac{\omega}{c}x}) a_\omega + \text{conj.}, \quad (6.40)$$

$$R_\omega = e^{2i\frac{\omega}{c}L} \frac{T(\omega)}{T^*(\omega)} \approx \sqrt{\frac{2\pi}{\Gamma_c} \cdot \frac{\omega_c}{\omega}} \alpha^*(\omega) \left(\omega - \omega_c - i\frac{\Gamma_c}{2} \right), \quad (6.41)$$

$\alpha(\omega)$ — коефіцієнт, що пов'язує істинну моду a_ω з дискретною модою резонатора c :

$$a_\omega = \alpha(\omega)c + \int_0^\infty d\omega' \beta(\omega, \omega'). \quad (6.42)$$

Його можна виразити як

$$\alpha(\omega) = \sqrt{\frac{L}{\pi c} \cdot \frac{\omega}{\omega_c}} \operatorname{sinc} \left((\omega - \omega_c) \frac{L}{c} \right) e^{-i\frac{\omega}{c}L} T^*(\omega). \quad (6.43)$$

Враховуючи це, ми отримуємо наступний вираз для вектора Пойнтінга:

$$S(x) = \frac{\hbar}{2\pi\mathcal{A}} \int_0^\infty \sqrt{\omega\omega'} \operatorname{Re} \left[R_\omega R_{\omega'}^* e^{-i\frac{\omega-\omega'}{c}x} a_\omega^+ a_{\omega'} \right] d\omega d\omega'. \quad (6.44)$$

Далі, виписуючи a_ω в термінах оператора b_ω з внутрішньо-зовнішнього представлення $a_\omega = \int \beta(\omega, \omega') b'_\omega d\omega$, а також використовуючи співвідношення [276]

$$i \int \alpha^*(\omega) \beta(\omega, \omega') b'_\omega d\omega d\omega' = \int \kappa_c^*(\omega) b_\omega d\omega \quad (6.45)$$

ми отримуємо

$$S(x) = \frac{\hbar\omega_c}{\Gamma_c\mathcal{A}} \int_0^\infty \kappa_c^*(\omega) \kappa_c(\omega') e^{i\frac{\omega-\omega'}{c}x} b_\omega^+ b_\omega d\omega d\omega'. \quad (6.46)$$

Вводячи інтегрований оператор зовнішнього поля

$$b(x) = \frac{1}{\sqrt{\Gamma_c}} \int_0^\infty \kappa_c^*(\omega) e^{i\frac{\omega}{c}x} b_\omega d\omega, \quad (6.47)$$

ми маємо для вектора Пойнтінга

$$S(x) = \frac{\hbar\omega_c}{\Gamma_c\mathcal{A}} b^+(x) b(x). \quad (6.48)$$

Ми можемо ввести стан одного фотона, що випромінюється з резонатора завдяки $\Gamma_c(\kappa_c(\omega))$ і залежить від координати $x > 0$:

$$|\rightsquigarrow_{\text{out}}(x, t)\rangle = b^+(x > 0, t) |\emptyset\rangle, \quad (6.49)$$

де ми вважаємо, що фотон поширюється в напрямку зростання x , а резонатор розташований за координатою $x = 0$ (рисунок 6.5). Звернімо увагу, що цей квантовий стан залежить від часу тільки завдяки використанню картини Гейзенберга для оператора b_ω .

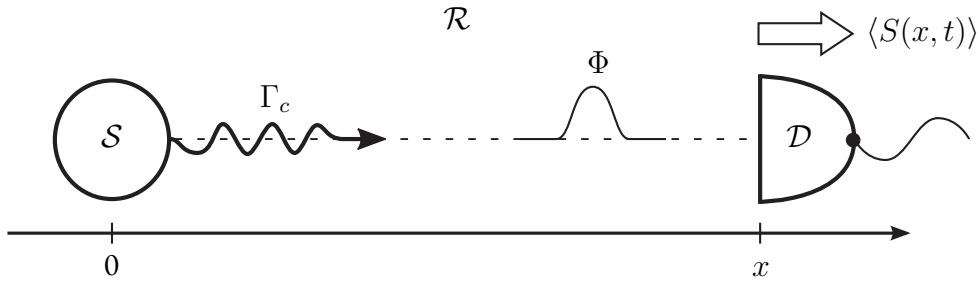


Рисунок 6.5: Схематичне зображення процесу детектування фотона. Джерело фотонів S , розташоване за координатою $x = 0$, випромінює фотон зі швидкістю релаксації Γ_c у навколишнє середовище \mathcal{R} . Фотон реєструється детектором \mathcal{D} . Фотонний потік Φ вимірюється через усереднення квантованого вектора Пойнтинга $\langle S \rangle(x, t)$.

6.3.2 Інтегровані оператори навколишнього поля

У формулі (6.47) ми ввели інтегрований оператор вільного поля, котрий ми обчислюємо, інтегруючи рівняння (6.37а) на інтервалі від t_0 до t :

$$\begin{aligned} b(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{\Gamma_c}} \int_0^\infty \kappa_c^*(\omega) b_\omega(t) e^{i\omega x/c} \\ &= b_{\text{in}}\left(t - \frac{x}{c}\right) + \int_{t_0}^t dt' \int_0^\infty \frac{|\kappa_c(\omega)|^2}{\sqrt{\Gamma_c}} c(t') e^{-i\omega(t-t')} e^{i\omega \frac{x}{c}}, \end{aligned} \quad (6.50)$$

де ми вводимо *оператор введення* (англ. *input operator*):

$$b_{\text{in}}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\Gamma_c}} \int_0^{+\infty} \kappa_c^*(\omega) b_\omega(t_0) e^{-i\omega(\tau-t_0)}. \quad (6.51)$$

Можна, до речі, помітити, що визначення (6.50) відрізняється від стандартного, де $b(x, t)$ вводиться як перетворення Фур'є від b_ω [269, 283, 284]. Замість цього ми визначили оператор через потенціал взаємодії $\kappa_c(\omega)$.

Щоб порахувати інтеграл за частотою в рівнянні (6.50), ми підставимо потенціал із (6.18). Таким чином, ми маємо обчислити наступний інтеграл:

$$\int_0^\infty |\kappa_c(\omega)|^2 e^{-i\omega\tau} d\omega = \frac{\Gamma_c}{2\pi} \int_0^\infty \text{sinc}^2\left(\frac{\omega - \omega_c}{c} L\right) e^{-i\omega\tau} d\omega. \quad (6.52)$$

де $\tau = t - t' - \frac{x}{c}$.

Поширюючи інтегрування на від'ємну напіввісь, оскільки її вклад є малим, ми можемо звести інтеграл (6.52) до двох інтегралів:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\pm ix\tau}}{x^2} dx, \quad (6.53)$$

які можна обчислити методами комплексного аналізу, причому результат відрізнятиметься залежно від знака перед τ . Таким чином, для інтеграла (6.52) маємо значення

$$\frac{\Gamma_c}{4\pi} \left(\frac{c}{L}\right)^2 e^{-i\omega_c(t-t'-x/c)} \times \begin{cases} -\pi(t' - t + \frac{x}{c} - \frac{2L}{c}) & \text{якщо } t < t' + \frac{x}{c} < t + \frac{2L}{c}; \\ \pi(t' - t + \frac{x}{c} + \frac{2L}{c}) & \text{якщо } t - \frac{2L}{c} < t' + \frac{x}{c} < t; \\ 0 & \text{інакше.} \end{cases} \quad (6.54)$$

Обчисливши інтеграл за частотою, можемо тепер обрахувати інтеграл за часом у (6.50). Враховуючи результат (6.54), ми можемо розкласти інтеграл у залежності від значення x :

$$\int_{t_0}^t = \begin{cases} \int_{t-\frac{x}{c}-\frac{2L}{c}}^{t-\frac{x}{c}} + \int_{t-\frac{x}{c}}^{t-\frac{x}{c}+\frac{2L}{c}} & \text{якщо } x > 2L; \\ \int_{t-\frac{x}{c}-\frac{2L}{c}}^{t-\frac{x}{c}} + \int_{t-\frac{x}{c}}^t & \text{якщо } 0 < x < 2L, \end{cases} \quad (6.55)$$

для $t > t_0 + \frac{x}{c} + \frac{2L}{c}$. Оскільки нас цікавить динаміка на часах набагато більших за (світлову) довжину резонатора $t \gg \frac{2L}{c}$, то інтеграл для $x < 2L$ можна рахувати так само, як і інтеграл для $x > 2L$, бо $t = 2L/c > t - x/c - 2L/c \approx t$. Інтеграли рахуватимемо за формулою трапеції

$$\int_a^b f(t)dt \approx \frac{f(a) + f(b)}{2} \cdot (b - a). \quad (6.56)$$

Тоді для повного інтеграла ми маємо

$$\int_{t_0}^t dt' \int_0^\infty d\omega |\kappa_c(\omega)|^2 e^{-i\omega(t-t'-x/c)} c(t') = \Gamma_c c\left(t - \frac{x}{c}\right). \quad (6.57)$$

Для $x = 0$ після інтегрування (6.52) маємо

$$\frac{\Gamma_c}{4\pi} \left(\frac{c}{L}\right)^2 e^{-i\omega_c(t-t')} \times \begin{cases} -\pi(t' - t - \frac{x}{c} - \frac{2L}{c}) & \text{якщо } t < t' < t + \frac{2L}{c}; \\ \pi(t' - t + \frac{x}{c} + \frac{2L}{c}) & \text{якщо } t - \frac{2L}{c} < t' < t; \\ 0 & \text{інакше.} \end{cases} \quad (6.58)$$

Інтегруючи від t_0 до t аналогічно до загального випадку, маємо

$$\int_{t_0}^t dt \int_0^\infty d\omega |\kappa_c(\omega)|^2 e^{-i\omega(t-t')} c(t') = \frac{\Gamma_c}{2} c(t). \quad (6.59)$$

Отже, ми маємо для інтегрованого оператора зовнішнього поля

$$b(x, t) = b_{\text{in}}\left(t - \frac{x}{c}\right) + \sqrt{\Gamma_c} c\left(t - \frac{x}{c}\right). \quad (6.60)$$

Під час інтегрування ми припустили $t \gg \frac{2L}{c}$, $t > t_0 + \frac{x}{c} + \frac{2L}{c}$. Надалі ми нехтуватимемо довжиною резонатора, бо ми вважаємо, що детектування фотона відбувається на відстані, великій порівняно з L . Ми вводимо також *оператор виведення* (англ. *output operator*)

$$b_{\text{out}}\left(t - \frac{x}{c}\right) = b(x>0, t), \quad (6.61)$$

і таким чином маємо так зване співвідношення введення-виведення [269]

$$b_{\text{out}}\left(t - \frac{x}{c}\right) = b_{\text{in}}\left(t - \frac{x}{c}\right) + \sqrt{\Gamma_c} c \left(t - \frac{x}{c}\right). \quad (6.62)$$

Звернімо увагу, що це співвідношення слідує з конкретного виду потенціала $\kappa_c(\omega)$, записаного в рівнянні (6.18), що таким чином обґрунтовує марківське наближення. Таке формулювання дозволяє інтерпретувати оператор b_{out} через вектор Пойнтінга, як показано нижче в рівнянні (6.67).

За координатою резонатора $x = 0$, ми отримуємо для $b(x=0, t)$ такий вираз:

$$b_0(t) \equiv b(x=0, t) = b_{\text{in}}(t) + \frac{\sqrt{\Gamma_c}}{2} c(t). \quad (6.63)$$

Цією формулою ми ще скористаємося далі, виводячи рівняння для матриці густини.

Також ми можемо спростити рівняння Гейзенберга-Ланжевена для $c(t)$:

$$\dot{c}(t) = -\left(i\omega_c + \frac{\Gamma_c}{2}\right) c(t) - \sqrt{\Gamma_c} b_{\text{in}}(t) - ig\sigma(t). \quad (6.64)$$

6.3.3 Фотонний потік

Тепер ми можемо виписати вектор Пойнтінга (6.48) у внутрішньо-зовнішньому представленні:

$$S(x>0, t) = \frac{\hbar\omega}{\mathcal{A}} b^+ \left(t - \frac{x}{c}\right) b \left(t - \frac{x}{c}\right). \quad (6.65)$$

Для певного квантового стану кількість енергії, що проходить через площу \mathcal{A} за час dt , дорівнює середньому потоку вектора Пойнтінга через цю площу:

$$\mathcal{A} \langle S(x, t) \rangle dt = \hbar\omega_c \langle b^+(x, t) b(x, t) \rangle dt. \quad (6.66)$$

Кількість фотонів, відповідно, дорівнює $dn(x, t) \equiv \langle b^+(x, t) b(x, t) \rangle dt$. Тоді фотонний потік для $x > 0$

$$\Phi(x, t) = \frac{dn(x, t)}{dt} = \left\langle b^+ \left(t - \frac{x}{c}\right) b \left(t - \frac{x}{c}\right) \right\rangle. \quad (6.67)$$

Оскільки $b(t - x/c)$ є оператором виведення (6.61), то (6.67) вказує на його зв'язок із фотонним потоком.

Якщо ми оперемо як початковий стан поле без фотонів: $\rho(t_0) = \rho_S(t_0) \otimes |\emptyset\rangle \langle \emptyset|$, то середні значення членів, що містять b_{in} та b_{in}^+ , зануляються. Тоді для випроміненого у вільний простір фотона маємо (для $t > t_0 + x/c, x > 0$)

$$\Phi(x, t) = \Gamma_c \left\langle c^+ \left(t - \frac{x}{c} \right) c \left(t - \frac{x}{c} \right) \right\rangle \quad (6.68)$$

Цей ключовий результат показує, що фотонний потік можна визначити, усереднюючи квантову динаміку кількості фотонів у резонаторі в картині Гейзенберга [285].

6.4 Рівняння часової еволюції для матриці густини

Виведемо тепер для системи «атом і резонатор» рівняння часової еволюції для матриці густини, котре використовуватиметься для квантового усереднення в формулі (6.67).

Динаміку системи у внутрішньо-зовнішньому представленні можна описати за допомогою рівняння для матриці густини у формі Ліндблада. Виводитимемо його аналогічно до [269, 271, 286, 287]. із рівняння Гейзенберга для операторів $X_S(t) = U^+(t, t_0) X_S U(t, t_0)$ системи в картині Гейзенберга, використовуючи формулу (6.15) із гамільтоніаном $H_S(t) = H_A + H_{AC} + H_C$:

$$\begin{aligned} \frac{dX_S(t)}{dt} &= -\frac{i}{\hbar} [X_S(t), H^{(H)}(t)] \\ &= -\frac{i}{\hbar} [X_S(t), H_S^{(H)}(t)] \\ &\quad + \int_0^\infty \left(\begin{aligned} &\kappa_c(\omega) b_\omega^+(t) [X_S(t), c(t)] \\ &+ \kappa_c^*(\omega) [X_S(t), c^+(t)] b_\omega(t) \end{aligned} \right) d\omega. \end{aligned} \quad (6.69)$$

Із визначення (6.50) ми маємо

$$\int_0^\infty \kappa_c^*(\omega) b_\omega(t) d\omega = \sqrt{\Gamma_c} b(x=0, t). \quad (6.70)$$

Використовуючи (6.63), отримуємо

$$\begin{aligned}
\frac{dX_S(t)}{dt} &= -\frac{i}{\hbar} [X_S(t), H_S^{(H)}(t)] \\
&\quad + \left(\sqrt{\Gamma_c} b_{in}^+(t) + \frac{\Gamma_c}{2} c^+(t) \right) [X_S(t), c(t)] \\
&\quad - [X_S(t), c^+(t)] \left(\sqrt{\Gamma_c} b_{in}(t) + \frac{\Gamma_c}{2} c(t) \right) \\
&= -\frac{i}{\hbar} [X_S(t), H_S^{(H)}(t)] \\
&\quad + \sqrt{\Gamma_c} b_{in}^+(t) [X_S(t), c(t)] \\
&\quad + [X_S(t), c^+(t)] \sqrt{\Gamma_c} b_{in}(t) \\
&\quad + \Gamma_c \left(c^+(t) X_S(t) c(t) - \frac{1}{2} \{c^+(t) c(t), X_S(t)\} \right).
\end{aligned} \tag{6.71}$$

Вводячи оператор дисипації

$$\mathcal{D}_{in,t}^+(X_S(t)) = \sqrt{\Gamma_c} b_{in}^+(t) [X_S(t), c(t)] - \sqrt{\Gamma_c} [X_S(t), c^+(t)] b_{in}(t), \tag{6.72}$$

ми маємо

$$\begin{aligned}
\frac{dX_S(t)}{dt} &= -\frac{i}{\hbar} [X_S(t), H_S^{(H)}(t)] + \mathcal{D}_{in,t}^+(X_S(t)) \\
&\quad + \Gamma_c \left(c^+(t) X_S(t) c(t) - \frac{1}{2} \{c^+(t) c(t), X_S(t)\} \right).
\end{aligned} \tag{6.73}$$

Середнє значення X_S ми обчислюємо наступним чином:

$$\begin{aligned}
\langle X_S(t) \rangle &= \text{tr}[X_S(t) \rho(t_0)] \\
&= \text{tr}(X_S U(t, t_0) \rho(t_0) U^+(t, t_0)) \\
&= \text{tr}_S \{ \text{tr}_R [X_S U(t, t_0) \rho(t_0) U^+(t, t_0)] \} \\
&= \text{tr}_S [X_S \rho_S(t)]
\end{aligned} \tag{6.74}$$

де ми використали циклічну властивість сліду і ввели

$$\rho_S(t) = \text{tr}_R [U(t, t_0) \rho(t_0) U^+(t, t_0)]. \tag{6.75}$$

Аналогічно, використовуючи лінійність сліду, ми можемо обчислити середнє значення правої частини (6.73):

$$\begin{aligned}
\left\langle [X_S(t), H_S^{(H)}(t)] \right\rangle &= \text{tr} \left([X_S(t), H_S^{(H)}(t)] \rho(t_0) \right) \\
&= \text{tr} ([X_S, H_S(t)] U(t, t_0) \rho(t_0) U^+(t, t_0)) \\
&= \text{tr}_S ([X_S, H_S(t)] \rho_S(t)) \\
&= \text{tr}_S (\rho_S(t) [X_S, H_S(t)]),
\end{aligned} \tag{6.76}$$

$$\begin{aligned}\langle c^+(t)X_S(t)c(t) \rangle &= \text{tr} (c^+ X_S c \rho_S(t)) \\ &= \text{tr} (X_S c \rho_S(t) c^+) \end{aligned} \quad (6.77)$$

$$\begin{aligned}\langle \{c^+(t)c(t), X_S(t)\} \rangle &= \text{tr}_S (\{c^+ c, X_S\} \rho_S(t)) \\ &= \text{tr}_S (X_S \{\rho_S(t), c^+ c\}) \end{aligned} \quad (6.78)$$

Вважаючи навколишнє поле початково вакуумним $\rho_R(t_0) = |\emptyset\rangle \langle \emptyset|$, ми отримуємо для $\mathcal{D}_{\text{in},t}$

$$\begin{aligned}\text{tr} (b_{\text{in}}^+(t) [X_S(t), c(t)] \rho(t_0)) &= \text{tr} ([X_S(t), c(t)] \rho(t_0) b_{\text{in}}^+(t)) \\ &= \text{tr} ([X_S(t), c(t)] \rho_S(t_0) \otimes \rho_R(t_0) b_{\text{in}}^+(t)) \\ &= \text{tr} ([X_S(t), c(t)] \rho_S(t_0) \otimes |\emptyset\rangle \langle \emptyset| b_{\text{in}}^+(t)) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (6.79)$$

Аналогічно

$$\text{tr} ([X_S(t), c^+(t)] b_{\text{in}}(t) \rho(t_0)) = 0. \quad (6.80)$$

Таким чином рівняння (6.73) має вигляд

$$\begin{aligned}\text{tr} \left(X_S \frac{d\rho_S(t)}{dt} \right) &= \text{tr} (X_S [H_S(t) \rho_S(t)]) \\ &+ \Gamma_c \left(\text{tr}_S (X_S c \rho_S(t) c^+) - \frac{1}{2} \text{tr}_S (X_S [\rho_S(t), c^+ c]) \right). \end{aligned} \quad (6.81)$$

Використовуючи співвідношення

$$\forall A \rightarrow \text{tr}(AB) = \text{tr}(AC) \Leftrightarrow B = C, \quad (6.82)$$

ми отримуємо остаточний вигляд рівняння часової еволюції:

$$\frac{d}{dt} \rho_S(t) = -\frac{i}{\hbar} [H_S(t), \rho_S(t)] + \Gamma_c \left(c \rho_S(t) c^+ - \frac{1}{2} \{c^+ c, \rho_S(t)\} \right). \quad (6.83)$$

Тут усі оператори системи σ, c не залежать від часу (картина Шредінгера), а гамільтоніан $H_S(t)$ залежить від часу тільки за рахунок змінної в часі частоти Рабі класичного поля $\Omega(t)$.

6.5 Модель джерела фотонів

Далі ми з попередньої теорії виведемо модель джерела одиночних фотонів на основі керованого зовнішнім полем атома в напівпрозорому резонаторі. Випромінювання фотона в таких системах було теоретично та експериментально

досліджено на атомах, що проходять через резонатор, у конфігурації STIRAP [32, 264, 265, 288], а також на захопленому йоні [258].

Оскільки нас цікавить лише система «атом і резонатор», то ми працюватимемо в базисі станів $|g, \emptyset\rangle, |e, \emptyset\rangle, |f, \emptyset\rangle, |f, \rightsquigarrow\rangle$, відповідно до схеми на рисунку 6.2. Оскільки ми не розрізняємо тепер стани вільного поля, то в позначеннях ми відкидатимемо індекси $_{in}$ та $_{S}$. Ми скористаємося сформульованою раніше теорією для матриці густини:

$$\dot{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar} [H(t), \rho(t)] + \mathcal{L}[\rho(t)], \quad (6.84)$$

з дисипативним членом $\mathcal{L}[\rho] = \Gamma_c (c\rho c^+ - \frac{1}{2} \{\rho, c^+c\})$. Рівняння (6.84) можна переписати як

$$\dot{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar} \left(\tilde{H}(t)\rho(t) - \rho(t)\tilde{H}^+(t) \right) + \Gamma_c c\rho(t)c^+, \quad (6.85)$$

де \tilde{H} — неермітовий дисипативний гамільтоніан $\tilde{H}(t) = H(t) - i\hbar\frac{\Gamma_c}{2}c^+c$, аналогічно до (6.26). Виразивши гамільтоніан у матричній формі:

$$H(t) = \begin{bmatrix} A(t) & \cdot \\ \cdot & -\omega_c \end{bmatrix}, \quad (6.86a)$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cdot & \Omega(t) & \cdot \\ \Omega(t) & \Delta & g \\ \cdot & g & \cdot \end{pmatrix}, \quad (6.86b)$$

ми бачимо, що він розпадається на два незалежних блоки: $A(t)$ та $-\omega_c$. Для матриці густини

$$\rho(t) = \begin{bmatrix} \rho_{AA}(t) & \rho_{A0}(t) \\ \rho_{0A}(t) & \rho_{00}(t) \end{bmatrix}, \quad (6.87)$$

ми тоді маємо два рівняння:

$$\dot{\rho}_{AA} = -i \left(\tilde{A}(t)\rho_{AA}(t) - \rho_{AA}(t)\tilde{A}^+(t) \right), \quad (6.88a)$$

$$\dot{\rho}_{00} = \Gamma_c D\rho_{AA}(t)D^+, \quad (6.88b)$$

де $D = (0, 0, 1)$ — блок із матричного представлення оператора c , $\tilde{A}(t) = A(t) - \frac{i}{2}\Gamma_c D^+D$. Оскільки як початковий стан ми обрали $|g, \emptyset\rangle$, динаміка системи не залежить від ρ_{A0} , а рівняння (6.88a) відповідає рівнянню Шредінгера з втратами (тобто з неермітовим гамільтоніаном), виведеному у (6.32), тобто $\text{tr}[\rho_{AA}] < 1$:

$$i\frac{\partial}{\partial t} |\psi_{\text{eff}}\rangle = \begin{pmatrix} \cdot & \Omega(t) & \cdot \\ \Omega(t) & \Delta & g \\ \cdot & g & -i\frac{\Gamma_c}{2} \end{pmatrix} |\psi_{\text{eff}}\rangle, \quad (6.89)$$

де $|\psi_{\text{eff}}\rangle$ — стан системи у псевдомодовому представленні. Населеність, що втрачається зі станів $|g, \emptyset\rangle$, $|e, \emptyset\rangle$ та $|f, \rightsquigarrow\rangle$, збирається в стані $|f, \emptyset\rangle$, так що повна система «атом, резонатор і навколишнє поле» є замкнутою: $P_{g,0} + P_{e,0} + P_{f,1} + P_{f,0} = 1$, де $P_{i,n}(t) = \langle i, n | \rho(t) | i, n \rangle$ — населеність стану $|i, n\rangle$ (i — стан атома, n — кількість фотонів). Звернімо увагу, що (6.89) отримано у внутрішньо-зовнішньому представленні. Оскільки це рівняння співпадає з отриманим у псевдомодовому представленні рівнянням (6.32), то межі застосовності обох представлень співпадають.

Перепишучи (6.88b), ми отримуємо

$$\dot{P}_{f,0}(t) = \Gamma_c P_{f,1}(t). \quad (6.90)$$

З іншого боку, за визначенням квантового середнього $\langle \mathcal{O} \rangle = \text{tr}(\rho \mathcal{O})$, можна виразити фотонний потік (6.68) через населеності:

$$\Phi(t) \equiv \frac{dn}{dt} = \Gamma_c P_{f,1}(t). \quad (6.91)$$

Ми тоді можемо трактувати $P_{f,0}(t)$ як кількість фотонів, що випромінюються з резонатора: $P_{f,0}(t) \equiv n(t)$. Така схема дозволяє визначити форму фотона через фотонний потік $\Phi(t)$ із динаміки системи «атом і резонатор», що визначається рівнянням Шредінгера (6.89).

6.6 Контроль за формою фотона

Проаналізуємо тепер динаміку для одномодового резонатора $L = \lambda_c/2$. Ми порівняємо режим сильної взаємодії $g > \Gamma_c$ із режимом $g \lesssim \Gamma_c$. Параметри обрано так, щоб бути в межах застосовності внутрішньо-зовнішнього та псевдомодового представлення. Результати обчислень зображено на рисунку 6.6. Як бачимо, для $\Gamma_c = 30/T < g$ стан із фотоном у резонаторі $|f, \rightsquigarrow\rangle$ є більш заселеним, ніж для $\Gamma_c = 90/T > g$.

На рисунку 6.7 ми порівнюємо фотони всередині та зовні резонатора для різних значень Γ_c , використовуючи внутрішньо-зовнішнє представлення (6.36). На рисунку 6.7 (а) показано часову залежність населеності $P_{f,1}$ для фотона всередині резонатора. Крім того, що зі зменшенням Γ_c населеність $|f, \rightsquigarrow\rangle$ збільшується, її графік також для симетричної залежності $\Omega(t)$ стає несиметричним. Рисунок 6.7 (б) показує спектр випроміненого з резонатора фотона. Як бачимо, чим більш добротним є резонатор, тим, по-перше, спектр є вузьким, а по-друге, тим він є ближчим до резонансу.

Прямо контролювати форму випроміненого фотона можна за великих відстройок $\Delta \gg \Omega$, $\Delta \gg g$, коли рівень $|e, \emptyset\rangle$ можна адіабатично прибрати [289], а також за слабкої взаємодії $G \ll \Gamma_c$ та $g^2/\Delta \ll \Gamma_c$, де $G = -g\Omega/\Delta$ — ефективний

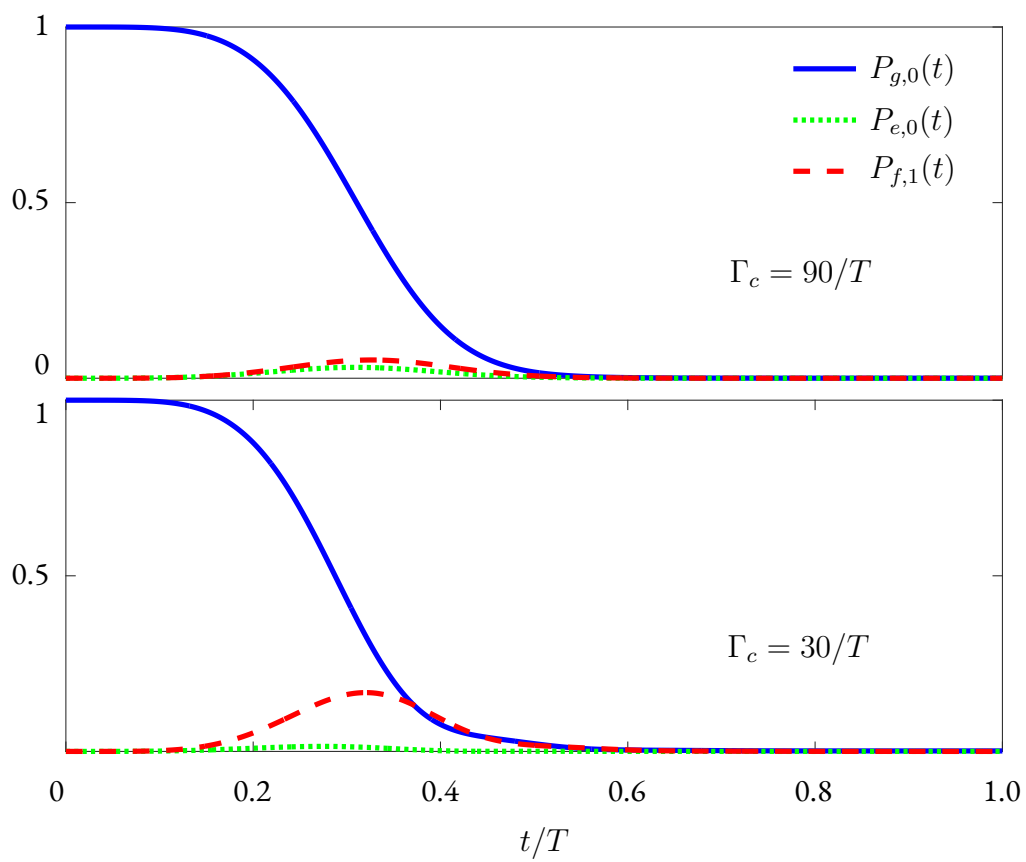


Рисунок 6.6: Динаміка системи, обчислена за рівнянням (6.89). Параметри системи: $\Omega(t) = \Omega_0 \sin^2(\pi \frac{t}{T})$, $|g| = 60/T$, $\Delta = 150/T$, $\Omega_0 = 60/T$, $\omega_c = 2416/T$.

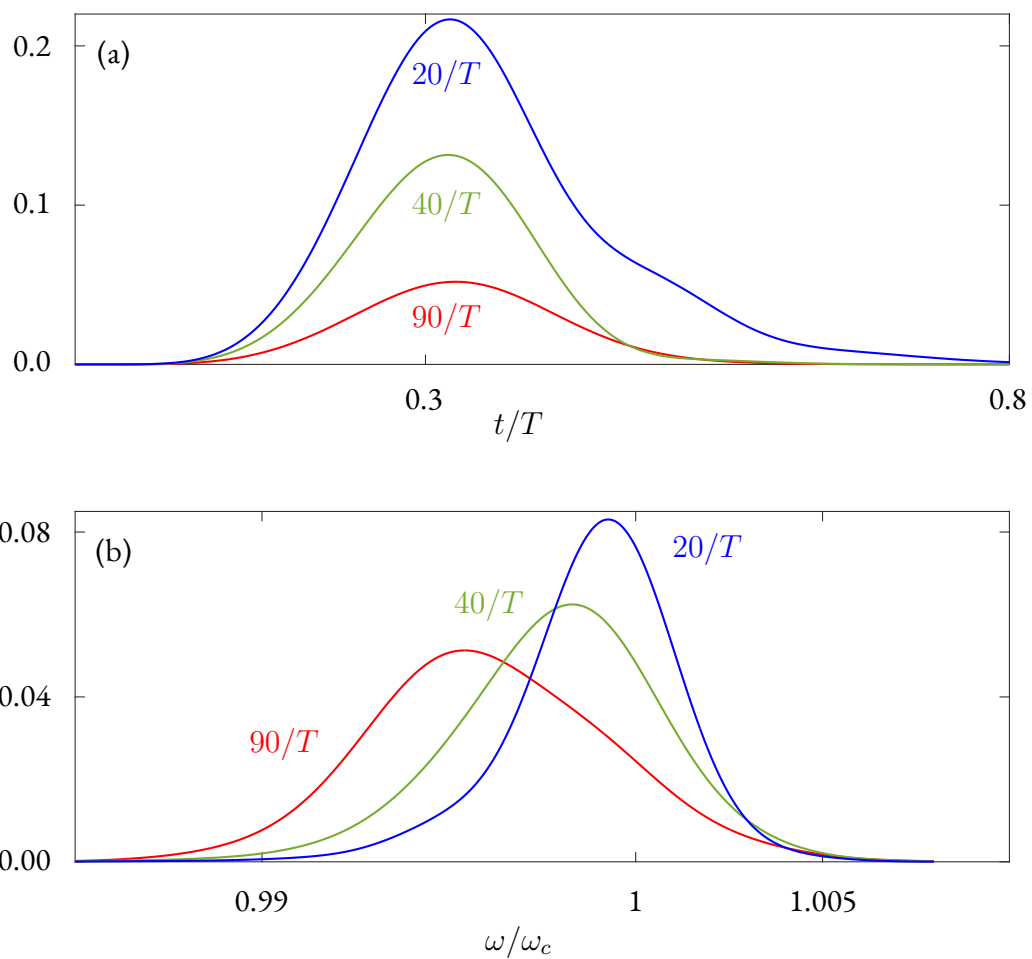


Рисунок 6.7: Часовий профіль фотона в резонаторі **(a)** та частотний спектр фотона зовні резонатора **(b)** для різних значень Γ_c . Інші параметри мають такі само значення, як і на рисунку 6.6.

потенціал раманівської взаємодії (що дозволяє також адіабатично прибрати стан $|g, \rightsquigarrow\rangle$).

В результаті адіабатичного наближення ми маємо:

$$c_{g,0}(t) = \exp\left(-\frac{\theta(t)}{2} + i\zeta(t)\right), \quad (6.92a)$$

$$\zeta(t) = \int_0^t \frac{\Omega^2(t')}{\Delta} dt', \quad (6.92b)$$

$$\theta(t) = \int_0^t \frac{4G^2(t')}{\Gamma_c} dt'. \quad (6.92c)$$

Обчисливши $c_{g,0}(t)$, ми можемо обчислити $c_{f,1}(t) = -2i\frac{G(t)}{\Gamma_c}c_{g,0}(t)$, а також фотонний потік за формулою (6.91):

$$\Phi(t) = \dot{\theta}(t)e^{-\theta(t)}. \quad (6.93)$$

Ми можемо також розв'язати зворотню задачу — визначити залежність $\Omega(t)$, що створює бажаний фотонний потік $\Phi(t)$:

$$\theta(t) = -\log\left(1 - \int_0^t \Phi(t')dt'\right). \quad (6.94)$$

Ми тоді отримуємо для частоти Рабі наступний вираз:

$$\Omega(t) = \frac{\Delta\sqrt{\Gamma_c}}{2g} \sqrt{\frac{\Phi(t)}{1 - \int_0^t \Phi(t')dt'}}. \quad (6.95)$$

Цей вираз може розходитись на великих часах. Щоб запобігти цьому, ми вводимо параметр ефективності $\eta < 1$, завдяки котрому $\Omega(t \rightarrow +\infty) = 0$, якщо $\Phi(t \rightarrow +\infty) = 0$ [264, 265].

Чисельні результати для гаусової функції

$$\Phi(t) = \frac{\eta\sqrt{\pi}}{T} \exp\left(-\frac{\pi^2 t^2}{T^2}\right), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)dt = \eta, \quad (6.96)$$

показано на рисунках 6.8 (а, б). Для значення $\Gamma_c = 90/T$ ми отримали $\max_t G(t) \approx 13/T \ll \Gamma_c$. Ми також чисельно перевірили фотонний потік, порівнявши його за теоретично обчисленою за формулою (6.95) $\Omega(t)$ за допомогою рівняння Шредінгера (6.89). Чисельно розрахований потік збігається з початково заданим.

За формулою (6.95) можна досліджувати і складніші форми фотонів [290, 291], наприклад, ті, що було отримано за допомогою резонансних процесів над вільними атомами [264, 265].

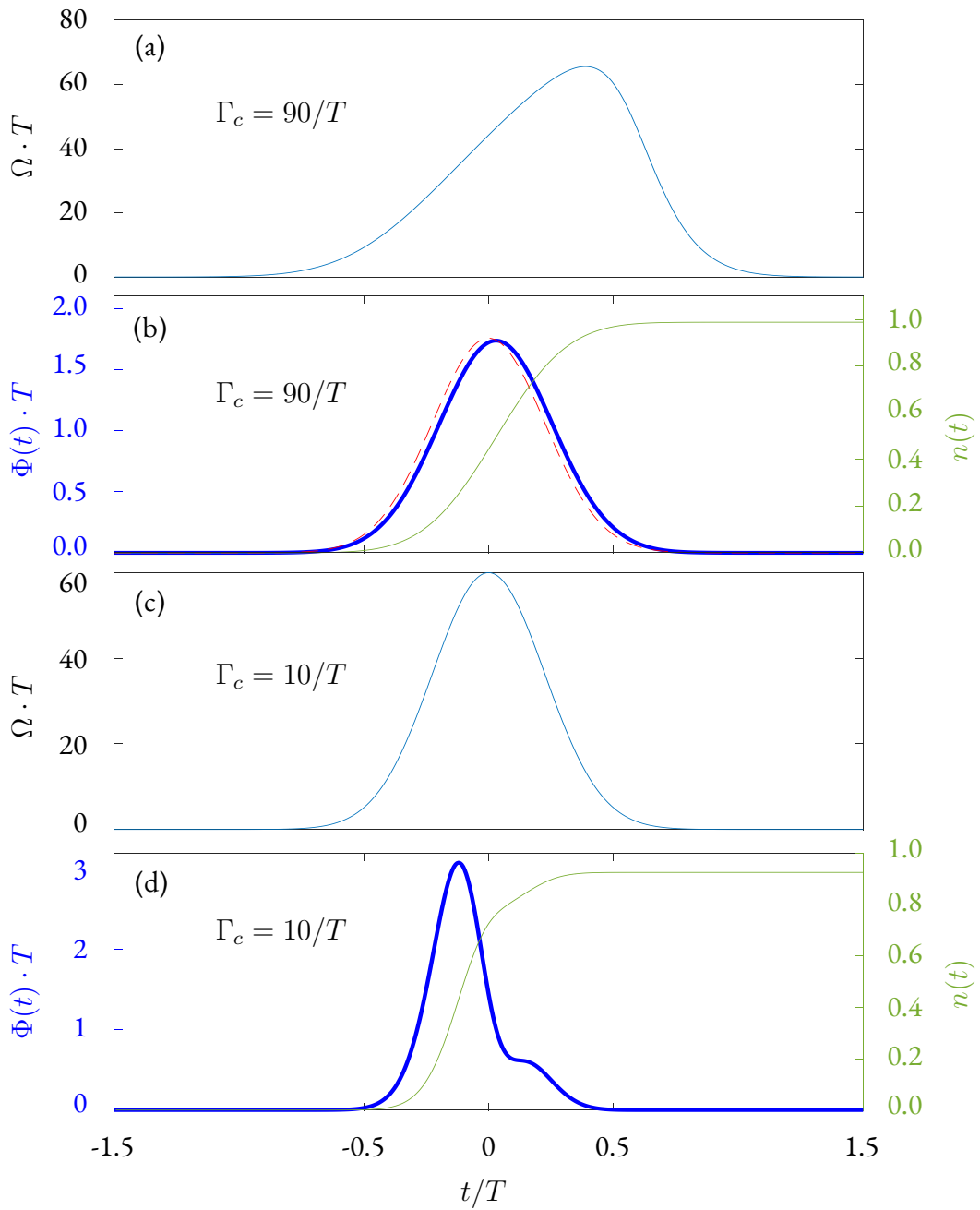


Рисунок 6.8: Частота Рабі $\Omega(t)T$, чисельно обчислений за (6.96) фотонний потік $\Phi(t)$ (товста синя лінія) та середня кількість випромінених фотонів $n(t) = \int_{-\infty}^t \Phi(t') dt' = \Gamma_c \int_{-\infty}^t |c_{f,1}(t')|^2 dt'$ (тонка зелена лінія), що відповідає бажаному фотонному потоку, зображеному пунктирною червоною лінією для $\Gamma_c = 90/T$ (a, b) або частоті Рабі $\Omega(t) = 60 \exp\left(-\pi^2 \frac{t^2}{T^2}\right) / T$ для $\Gamma_c = 10/T$ (c, d). Параметри системи: $|g| = 60/T$, $\Delta = 300/T$, $\eta = 0.99$.

На рисунках 6.8 (c, d) показано аналогічні розрахунки для більш добротного резонатора: $\Gamma_c = 10/T$, $\max_t G(t) = 12/T \approx \Gamma_c$. Тут уже не можна адіабатично знехтувати станом $|f, \rightsquigarrow\rangle$. У цьому випадку фотон випромінюється раніше і швидше, а менша швидкість витоку фотона з резонатора призводить до деформації «хвоста» на графіку фотонного потоку.

6.7 Висновки до розділу 6

У розділі теоретично досліджено джерело фотонів, що складається з лямбда-атома, розташованого в резонаторі з одним напівпрозорим дзеркалом.

- Для опису системи з перших принципів розглянуто три представлення: істинно-модове, внутрішньо-зовнішнє та псевдомодове. В істинно-модовому представленні отримано потенціал взаємодії між резонатором та зовнішнім полем, що дозволяє описувати динаміку системи без будь-яких апіорних наближень. Зокрема, встановлено, що однієї вимоги високої добротності недостатньо для відповідності наближених моделей до точних, що важливо для резонаторів із відносно великими втратами та перекриттям мод, таких як плазмонні резонатори.
- Із перших принципів виведено феноменологічну модель псевдомодового представлення, доповнену повним описом системи, включаючи повні характеристики фотона в часовій та частотній областях. Це дозволяє точно визначити стан фотона, що випромінюється з резонатора.
- Досліджено ефективний режим слабкої взаємодії атома з резонатором за великого відстроювання та великих втрат у резонаторі, коли населеністю резонатора можна адіабатично знехтувати. У цьому випадку можна безпосередньо зв'язати амплітуду поля накачки з формою вихідного одиночного фотона, що дає змогу налаштовувати спектральну та часову форму випроміненого фотона за потребою.

Висновки

У дисертаційній роботі було експериментально, чисельно і теоретично досліджено джерела квантового світла різних типів.

1. Розроблено точну чисельну модель, яка описує взаємодію атомів зі складною структурою рівнів із класичним світлом довільної поляризації. Основні рівняння моделі включають квантові оператори у матричній формі, враховують поширення світла та часову еволюцію квантового стану атомів. Модель застосовано для опису експериментів, представлених у дисертації. Також вона може служити для чисельної підтримки експериментів із зупинки світла та оптимізації характеристик натрієвих опорних зірок під час астрономічних спостережень.
2. Розроблену чисельну модель використано для створення джерела біфотонів на основі чотирихвильової взаємодії на лазерно охолоджених атомах рубідію-87 у порожнистому оптичному волокні із фотонним кристалом (НСРСВGF). За допомогою моделі визначено залежність поляризацій однофотонних стоксового та антистоксового полів від поляризацій накачки та контрольного поля. Показано, що за ортогональних поляризацій накачки і контрольного поля слабкі поля поляризовані ортогонально до близьких за частотою сильних полів, що сприяє їхньому легкому розрізненню в експерименті.
3. Експериментально реалізовано джерело пар квантово сплутаних фотонів на основі чотирихвильової взаємодії на лазерно охолоджених атомах рубідію-87 у порожнистому оптичному волокні із фотонним кристалом. Спостережено крос-кореляцію та порушення нерівності Коші-Буняковського-Шварца, що підтверджує квантову сплутаність біфотонів. Використовуючи методику Хенбері-Брауна і Твісса для визначення якості одиночних фотонів, зафіксовано близьку до нуля автокореляцію $g_{S,S|AS}^{(2)}(\tau=0) = 0.08(1)$, що свідчить про малу ймовірність випромінювання більше ніж одного фотона одночасно.

4. Завдяки специфічній конфігурації джерела досягнута висока його спектральна яскравість при низьких потужностях накачки, яка обмежується тільки перекриванням у часі послідовних біфотонів. Джерело біфотонів на основі порожнистого оптичного волокна з фотонним кристалом поєднує переваги джерел у вільному просторі та у хвильоводах. Досягнута **GSBP** перевищує показники існуючих джерел за на порядок вужчого спектру та на два порядки нижчої потужності накачки. Це робить його привабливим для інтеграції у фотонні мережі, використання в супутникових системах квантового розподілу ключів та застосування у фотонній квантовій метрології.
5. Досліджено явище раманівської суперфлуоресценції на холодних атомах рубідію-87, завантажених у порожнисте оптичне волокно. Спостережено підсилення спонтанного випромінення більш ніж на два порядки для кількості атомів $N \lesssim 2.2 \times 10^5$. Розроблено просту феноменологічну модель, що використовує поняття максимального колективного числа атомів для пояснення експериментальних залежностей в умовах неоднорідного збудження оптично товстого середовища.
6. Створено більш складну модель розрахунку максимального колективного числа атомів, яка базується на законі збереження енергії. Чисельно визначено критичну кількість атомів **MCN**, за якої класична суперфлуоресценція переходить у насичений режим, і **MCN** перестає залежати від фактичного числа атомів. Показано, що ця критична кількість атомів відповідає мінімуму загальної тривалості суперфлуоресцентного імпульса.
7. Проведено чисельне моделювання експериментів зі спостереження раманівської суперфлуоресценції з урахуванням магнітних підрівнів рубідію-87, поляризації світла та подвійного заломлення всередині порожнистого волокна. Це дозволило вивчити значно ширший порівняно з експериментом діапазон кількостей атомів i , як наслідок, виявити перехід від посиленого спонтанного випромінення до стимульованого розсіяння, а також вивчити специфічний режим насичення **SF**. Отримані результати поглиблюють розуміння впливу різних неоднорідностей на колективне розсіювання у великих порівняно з довжиною хвилі атомних ансамблях.
8. Досліджено джерело фотонів, що складається з лямбда-атома, поміщеного в резонатор із одним напівпрозорим дзеркалом. Для опису системи з перших принципів розглянуто три представлення: істинно-модове, внутрішньо-зовнішнє та псевдомодове. В істинно-модовому представленні отримано потенціал взаємодії між резонатором та зовнішнім полем, що дозволяє описувати динаміку системи без будь-яких апіорних наближень.

Встановлено, що умовою відповідності наближених моделей до точних є висока добротність (*англ. finesse*) та відсутність перекриття мод.

9. Обґрунтовано феноменологічну модель псевдомодового представлення, доповнену повним описом системи, включаючи повні характеристики фотона в часовій та частотній областях. Модель дозволяє точно визначати стан фотона, що випромінюється з резонатора. Досліджено ефективний режим слабкої взаємодії атома з резонатором за великого відстроювання та великих втрат у резонаторі, коли населеністю резонатора можна знехтувати. У цьому випадку поведінка амплітуди поля накачки визначає форму вихідного одиночного фотона, що дає змогу налаштовувати спектральну та часову форму випроміненого фотона за потребою.

Список літератури

- ¹A. Lewis, M Krämer, and M Travagnin, “Quantum technologies: implications for European policy”, JRC Science for Policy report (2016).
- ²E. B. Kania and J. K. Costello, “Quantum technologies, U.S.-China strategic competition, and future dynamics of cyber stability”, in [2017 International conference on cyber conflict \(CyCon U.S.\)](#) (2017), pp. 89–96.
- ³C. Coenen, A. Grinbaum, A. Grunwald, C. Milburn, and P. Vermaas, “Quantum technologies and society: towards a different spin”, [NanoEthics](#) **16**, 1–6 (2022).
- ⁴M. G. Raymer and C. Monroe, “The US National Quantum Initiative”, [Quantum Science and Technology](#) **4**, 020504 (2019).
- ⁵M. Mohseni, P. Read, H. Neven, S. Boixo, V. Denchev, R. Babbush, A. Fowler, V. Smelyanskiy, and J. Martinis, “Commercialize quantum technologies in five years”, [Nature](#) **543**, 171–174 (2017).
- ⁶A. Segal, “When China rules the web: technology in service of the state”, [Foreign Aff.](#) **97**, 10 (2018).
- ⁷Q. Zhang, F. Xu, L. Li, N.-L. Liu, and J.-W. Pan, “Quantum information research in China”, [Quantum Science and Technology](#) **4**, 040503 (2019).
- ⁸M. F. Riedel, D. Binosi, R. Thew, and T. Calarco, “The European quantum technologies flagship programme”, [Quantum Science and Technology](#) **2**, 030501 (2017).
- ⁹E. Gibney, “Europe’s billion-euro quantum project takes shape”, [Nature](#) **545**, 16–16 (2017).
- ¹⁰J. L. O’Brien, “Optical quantum computing”, [Science](#) **318**, 1567–1570 (2007).
- ¹¹A. Acín, I. Bloch, H. Buhrman, T. Calarco, C. Eichler, J. Eisert, D. Esteve, N. Gisin, S. J. Glaser, F. Jelezko, S. Kuhr, M. Lewenstein, M. F. Riedel, P. O. Schmidt, R. Thew, A. Wallraff, I. Walmsley, and F. K. Wilhelm, “The quantum technologies roadmap: a European community view”, [New Journal of Physics](#) **20**, 080201 (2018).
- ¹²EU, *Light-matter interfaces for quantum enhanced technology*, Project funded by European Union’s Horizon 2020 Research and Innovation Initiative under the Marie Skłodowska-Curie Grant Agreement № 765075, 2018–2022.

- ¹³A. Bruns, C.-Y. Hsu, S. Stryzhenko, E. Giese, L. P. Yatsenko, I. A. Yu, T. Halfmann, and T. Peters, “Ultrabright and narrowband intra-fiber biphoton source at ultralow pump power”, [Quantum Science and Technology](#) **8**, 015002 (2022).
- ¹⁴A. Saharyan, B. Rousseaux, Z. Kis, S. Stryzhenko, and S. Guérin, “Propagating single photons from an open cavity: description from universal quantization”, [Phys. Rev. Res.](#) **5**, 033056 (2023).
- ¹⁵S. Stryzhenko, A. Bruns, and T. Peters, *N Scaling of large-sample collective decay in inhomogeneous ensembles*, submitted to [Phys. Rev. Res.](#), 2023, [arXiv:2307.11623 \[quant-ph\]](#).
- ¹⁶S. Stryzhenko, “Four-wave mixing with Rubidium-87 in a hollow-core fiber”, in [LIMQUET conference](#) (Sept. 19–23, 2021).
- ¹⁷A. Bruns, C.-Y. Hsu, S. Stryzhenko, E. Giese, L. Yatsenko, I. A. Yu, T. Halfmann, and T. Peters, “Narrowband biphoton source of maximal spectral brightness at ultralow pump power”, in [The 27th International Conference on Atomic Physics](#) (July 17–22, 2022), p. 313.
- ¹⁸A. Bruns, C.-Y. Hsu, S. Stryzhenko, E. Giese, L. Yatsenko, I. Yu, T. Halfmann, and T. Peters, “Ultrabright and narrowband intra-fiber biphoton source at ultralow pump power”, in [DPG-Frühjahrstagung 2023, Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft](#), edited by B. Nunner (Mar. 5–10, 2023), p. 150.
- ¹⁹S. Stryzhenko, “Numerical research of coherent interaction between laser light of arbitrary polarization and atoms of a complex level structure with resolved hyperfine structure”, in [Resonance phenomena in atomic systems](#) (Sept. 19–21, 2023).
- ²⁰M. D. Eisaman, J. Fan, A. Migdall, and S. V. Polyakov, “Invited review article: single-photon sources and detectors”, [Review of Scientific Instruments](#) **82**, 071101 (2011), eprint: https://pubs.aip.org/aip/rsi/article-pdf/doi/10.1063/1.3610677/16006870/071101_1_online.pdf.
- ²¹C. J. Chunnillal, I. P. Degiovanni, S. Kück, I. Müller, and A. G. Sinclair, “Metrology of single-photon sources and detectors: a review”, [Optical Engineering](#) **53**, 081910–081910 (2014).
- ²²S. Slussarenko and G. J. Pryde, “Photonic quantum information processing: A concise review”, [Applied Physics Reviews](#) **6**, 041303 (2019), eprint: https://pubs.aip.org/aip/apr/article-pdf/doi/10.1063/1.5115814/14575021/041303_1_online.pdf.
- ²³D. A. Steck, *Quantum and atom optics*, available online at <http://steck.us/alkalidata> (revision 0.14, 23 August 2023), 2023.
- ²⁴R. J. Glauber, “The quantum theory of optical coherence”, [Phys. Rev.](#) **130**, 2529–2539 (1963).

- ²⁵A. Bruns, “Generation of narrowband photon pairs at high brightness within a hollow-core fiber”, en, PhD thesis (Technische Universität Darmstadt, Darmstadt, 2023), 89 pp.
- ²⁶P. Grangier, G. Roger, and A. Aspect, “Experimental evidence for a photon anti-correlation effect on a beam splitter: a new light on single-photon interferences”, *Europhysics Letters* **1**, 173 (1986).
- ²⁷J. F. Clauser, “Experimental distinction between the quantum and classical field-theoretic predictions for the photoelectric effect”, *Phys. Rev. D* **9**, 853–860 (1974).
- ²⁸X. Cao, M. Zopf, and F. Ding, “Telecom wavelength single photon sources”, *Journal of Semiconductors* **40**, 071901 (2019).
- ²⁹J.-P. Bourgoin, E Meyer-Scott, B. L. Higgins, B Helou, C Erven, H Hübel, B Kumar, D Hudson, I D’Souza, R Girard, R Laflamme, and T Jennewein, “Corrigendum: a comprehensive design and performance analysis of low Earth orbit satellite quantum communication”, *New Journal of Physics* **16**, 069502 (2014).
- ³⁰R. Bedington, J. M. Arrazola, and A. Ling, “Progress in satellite quantum key distribution”, en, *npj Quantum Information* **3**, 10.1038/s41534-017-0031-5 (2017).
- ³¹B. Albrecht, P. Farrera, X. Fernandez-Gonzalvo, M. Cristiani, and H. de Riedmatten, “A waveguide frequency converter connecting rubidium-based quantum memories to the telecom C-band”, en, *Nature Communications* **5**, 10.1038/ncomms4376 (2014).
- ³²A. Kuhn, M. Hennrich, and G. Rempe, “Deterministic single-photon source for distributed quantum networking”, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 067901 (2002).
- ³³C. Maurer, C. Becher, C. Russo, J. Eschner, and R. Blatt, “A single-photon source based on a single Ca^+ ion”, *New Journal of Physics* **6**, 94 (2004).
- ³⁴M. Steiner, A. Hartschuh, R. Korlacki, and A. J. Meixner, “Highly efficient, tunable single photon source based on single molecules”, *Applied Physics Letters* **90**, 183122 (2007), eprint: https://pubs.aip.org/aip/apl/article-pdf/doi/10.1063/1.2736294/8849190/183122_1_online.pdf.
- ³⁵S. Kako, C. Santori, K. Hoshino, S. Götzinger, Y. Yamamoto, and Y. Arakawa, “A gallium nitride single-photon source operating at 200 K”, *Nature Materials* **5**, 887–892 (2006).
- ³⁶A. J. Shields, “Semiconductor quantum light sources”, *Nature Photonics* **1**, 215–223 (2007).
- ³⁷S. Strauf, N. G. Stoltz, M. T. Rakher, L. A. Coldren, P. M. Petroff, and D. Bouwmeester, “High-frequency single-photon source with polarization control”, *Nature Photonics* **1**, 704–708 (2007).

- ³⁸R Alléaume, F Treussart, G Messin, Y Dumeige, J.-F. Roch, A Beveratos, R Brouri-Tualle, J.-P. Poizat, and P Grangier, “Experimental open-air quantum key distribution with a single-photon source”, *New Journal of Physics* **6**, 92 (2004).
- ³⁹T Gaebel, I Popa, A Gruber, M Domhan, F Jelezko, and J Wrachtrup, “Stable single-photon source in the near infrared”, *New Journal of Physics* **6**, 98 (2004).
- ⁴⁰E Wu, J. R. Rabeau, G Roger, F Treussart, H Zeng, P Grangier, S Praver, and J.-F. Roch, “Room temperature triggered single-photon source in the near infrared”, *New Journal of Physics* **9**, 434 (2007).
- ⁴¹H. Mäntynen, N. Anttu, Z. Sun, and H. Lipsanen, “Single-photon sources with quantum dots in III–V nanowires”, en, *Nanophotonics* **8**, 747–769 (2019).
- ⁴²I. Aharonovich, D. Englund, and M. Toth, “Solid-state single-photon emitters”, en, *Nature Photonics* **10**, 631–641 (2016).
- ⁴³R. B. Patel, A. J. Bennett, I. Farrer, C. A. Nicoll, D. A. Ritchie, and A. J. Shields, “Two-photon interference of the emission from electrically tunable remote quantum dots”, en, *Nature Photonics* **4**, 632–635 (2010).
- ⁴⁴D. J. P. Ellis, A. J. Bennett, C. Dangel, J. P. Lee, J. P. Griffiths, T. A. Mitchell, T.-K. Paraiso, P. Spencer, D. A. Ritchie, and A. J. Shields, “Independent indistinguishable quantum light sources on a reconfigurable photonic integrated circuit”, en, *Applied Physics Letters* **112**, 10.1063/1.5028339 (2018).
- ⁴⁵H. Wang, W. Li, X. Jiang, Y.-M. He, Y.-H. Li, X. Ding, M.-C. Chen, J. Qin, C.-Z. Peng, C. Schneider, M. Kamp, W.-J. Zhang, H. Li, L.-X. You, Z. Wang, J. Dowling, S. Höfling, C.-Y. Lu, and J.-W. Pan, “Toward scalable boson sampling with photon loss”, en, *Physical Review Letters* **120**, 10.1103/physrevlett.120.230502 (2018).
- ⁴⁶C. Antón, J. C. Loredó, G. Coppola, H. Ollivier, N. Viggianiello, A. Harouri, N. Somaschi, A. Crespi, I. Sagnes, A. Lemaître, L. Lanco, R. Osellame, F. Sciarrino, and P. Senellart, “Interfacing scalable photonic platforms: solid-state based multiphoton interference in a reconfigurable glass chip”, en, *Optica* **6**, 1471 (2019).
- ⁴⁷F. Lenzini, B. Haylock, J. C. Loredó, R. A. Abrahão, N. A. Zakaria, S. Kasture, I. Sagnes, A. Lemaître, H. Phan, D. V. Dao, P. Senellart, M. P. Almeida, A. G. White, and M. Lobino, “Active demultiplexing of single photons from a solid-state source”, en, *Laser & Photonics Reviews* **11**, 10.1002/lpor.201600297 (2017).
- ⁴⁸C. W. Chou, S. V. Polyakov, A. Kuzmich, and H. J. Kimble, “Single-photon generation from stored excitation in an atomic ensemble”, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 213601 (2004).
- ⁴⁹D. N. Matsukevich, T. Chanelière, S. D. Jenkins, S.-Y. Lan, T. A. B. Kennedy, and A. Kuzmich, “Deterministic single photons via conditional quantum evolution”, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 013601 (2006).

- ⁵⁰C. H. van der Wal, M. D. Eisaman, A. André, R. L. Walsworth, D. F. Phillips, A. S. Zibrov, and M. D. Lukin, “Atomic memory for correlated photon states”, *Science* **301**, 196–200 (2003), eprint: <https://www.science.org/doi/pdf/10.1126/science.1085946>.
- ⁵¹A. Kuzmich, W. P. Bowen, A. D. Boozer, A. Boca, C. W. Chou, L.-M. Duan, and H. J. Kimble, “Generation of nonclassical photon pairs for scalable quantum communication with atomic ensembles”, *Nature* **423**, 731–734 (2003).
- ⁵²L.-M. Duan, M. D. Lukin, J. I. Cirac, and P. Zoller, “Long-distance quantum communication with atomic ensembles and linear optics”, *Nature* **414**, 413–418 (2001).
- ⁵³P. Farrera, G. Heinze, B. Albrecht, M. Ho, M. Chávez, C. Teo, N. Sangouard, and H. de Riedmatten, “Generation of single photons with highly tunable wave shape from a cold atomic ensemble”, en, *Nature Communications* **7**, 10.1038/ncomms13556 (2016).
- ⁵⁴S.-z. Wang, M.-j. Wang, Y.-f. Wen, Z.-x. Xu, T.-f. Ma, S.-j. Li, and H. Wang, “Long-lived and multiplexed atom-photon entanglement interface with feed-forward-controlled readouts”, en, *Communications Physics* **4**, 10.1038/s42005-021-00670-9 (2021).
- ⁵⁵J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, and R. A. Holt, “Proposed experiment to test local hidden-variable theories”, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 880–884 (1969).
- ⁵⁶S. J. Freedman and J. F. Clauser, “Experimental test of local hidden-variable theories”, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 938–941 (1972).
- ⁵⁷A. Aspect, “Proposed experiment to test the nonseparability of quantum mechanics”, *Phys. Rev. D* **14**, 1944–1951 (1976).
- ⁵⁸A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, “Experimental tests of realistic local theories via Bell’s theorem”, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 460–463 (1981).
- ⁵⁹A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, “Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: a new violation of Bell’s inequalities”, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 91–94 (1982).
- ⁶⁰A. Aspect, J. Dalibard, and G. Roger, “Experimental test of Bell’s inequalities using time-varying analyzers”, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1804–1807 (1982).
- ⁶¹D. M. Greenberger, M. A. Horne, and A. Zeilinger, “Going beyond Bell’s theorem”, in *Bell’s theorem, quantum theory and conceptions of the universe*, edited by M. Kafatos (Springer Netherlands, Dordrecht, 1989), pp. 69–72.
- ⁶²D. M. Greenberger, M. A. Horne, A. Shimony, and A. Zeilinger, “Bell’s theorem without inequalities”, *American Journal of Physics* **58**, 1131–1143 (1990), eprint: https://pubs.aip.org/aapt/ajp/article-pdf/58/12/1131/11479397/1131_1_online.pdf.

- ⁶³D. Bouwmeester, J.-W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, and A. Zeilinger, “Experimental quantum teleportation”, *Nature* **390**, 575–579 (1997).
- ⁶⁴J.-W. Pan, D. Bouwmeester, H. Weinfurter, and A. Zeilinger, “Experimental entanglement swapping: entangling photons that never interacted”, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 3891–3894 (1998).
- ⁶⁵G. Weihs, T. Jennewein, C. Simon, H. Weinfurter, and A. Zeilinger, “Violation of Bell’s inequality under strict einstein locality conditions”, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5039–5043 (1998).
- ⁶⁶D. Bouwmeester, J.-W. Pan, M. Daniell, H. Weinfurter, and A. Zeilinger, “Observation of three-photon Greenberger-Horne-Zeilinger entanglement”, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1345–1349 (1999).
- ⁶⁷J.-W. Pan, D. Bouwmeester, M. Daniell, H. Weinfurter, and A. Zeilinger, “Experimental test of quantum nonlocality in three-photon Greenberger–Horne–Zeilinger entanglement”, *Nature* **403**, 515–519 (2000).
- ⁶⁸W. H. Louisell, A. Yariv, and A. E. Siegman, “Quantum fluctuations and noise in parametric processes. I.”, *Phys. Rev.* **124**, 1646–1654 (1961).
- ⁶⁹B. Zeldovich and D. Klyshko, “Field statistics in parametric luminescence”, *Russian, Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters* **9**, 40 (1969).
- ⁷⁰D. C. Burnham and D. L. Weinberg, “Observation of simultaneity in parametric production of optical photon pairs”, *Phys. Rev. Lett.* **25**, 84–87 (1970).
- ⁷¹M. Y. Saygin, A. S. Chirkin, and M. I. Kolobov, “Quantum holographic teleportation of entangled two-color optical images”, *J. Opt. Soc. Am. B* **29**, 2090–2098 (2012).
- ⁷²W.-B. Gao, C.-Y. Lu, X.-C. Yao, P. Xu, O. Gühne, A. Goebel, Y.-A. Chen, C.-Z. Peng, Z.-B. Chen, and J.-W. Pan, “Experimental demonstration of a hyper-entangled ten-qubit Schrödinger cat state”, *Nature Physics* **6**, 331–335 (2010).
- ⁷³X.-C. Yao, T.-X. Wang, P. Xu, H. Lu, G.-S. Pan, X.-H. Bao, C.-Z. Peng, C.-Y. Lu, Y.-A. Chen, and J.-W. Pan, “Observation of eight-photon entanglement”, *Nature Photonics* **6**, 225–228 (2012).
- ⁷⁴R. Rangarajan, M. Goggin, and P. Kwiat, “Optimizing type-I polarization-entangled photons”, *Opt. Express* **17**, 18920–18933 (2009).
- ⁷⁵L. E. Vicent, A. B. U’Ren, R. Rangarajan, C. I. Osorio, J. P. Torres, L. Zhang, and I. A. Walmsley, “Design of bright, fiber-coupled and fully factorable photon pair sources”, *New Journal of Physics* **12**, 093027 (2010).
- ⁷⁶D. Lee, I. Kim, and K. J. Lee, “Investigation of 1064-nm pumped type II SPDC in potassium niobate for generation of high spectral purity photon pairs”, *Crystals* **11**, 599 (2021).

- ⁷⁷A. Eshun, X. Yi, A. Wilson, S. Jeppson, J. H. Yoo, S. Kiannejad, M. Rushford, T. Bond, and T. Laurence, “Fluorescence lifetime measurements using photon pair correlations generated via spontaneous parametric down conversion (SPDC)”, *Opt. Express* **31**, 26935–26947 (2023).
- ⁷⁸C. Couteau, “Spontaneous parametric down-conversion”, *Contemporary Physics* **59**, 291–304 (2018), eprint: <https://doi.org/10.1080/00107514.2018.1488463>.
- ⁷⁹D. S. Hum and M. M. Fejer, “Quasi-phasematching”, en, *Comptes Rendus Physique* **8**, 180–198 (2007).
- ⁸⁰W. P. Grice, A. B. U’Ren, and I. A. Walmsley, “Eliminating frequency and space-time correlations in multiphoton states”, en, *Physical Review A* **64**, 10.1103/physreva.64.063815 (2001).
- ⁸¹S. Müller, T. Ito, K. Kobayashi, D. Luggenhölscher, U. Czarnetzki, and S. Hamaguchi, “Electric field measurements in near-atmospheric pressure nitrogen and air based on a four-wave mixing scheme”, *Journal of Physics: Conference Series* **227**, 012040 (2010).
- ⁸²A. Houard, Y. Liu, B. Prade, and A. Mysyrowicz, “Polarization analysis of terahertz radiation generated by four-wave mixing in air”, *Opt. Lett.* **33**, 1195–1197 (2008).
- ⁸³J. J. Pigeon, S. Y. Tochitsky, E. C. Welch, and C. Joshi, “Measurements of the nonlinear refractive index of air, N₂ and O₂ at 10 μm using four-wave mixing”, *Opt. Lett.* **41**, 3924–3927 (2016).
- ⁸⁴J. J. Ottusch, M. S. Mangir, and D. A. Rockwell, “Efficient anti-Stokes Raman conversion by four-wave mixing in gases”, *J. Opt. Soc. Am. B* **8**, 68–77 (1991).
- ⁸⁵T. Fuji, T. Horio, and T. Suzuki, “Generation of 12 fs deep-ultraviolet pulses by four-wave mixing through filamentation in neon gas”, *Opt. Lett.* **32**, 2481–2483 (2007).
- ⁸⁶A. F. Bunkin and S. M. Pershin, “Observation of water isotopes and spin-isomers rotational transitions induced by four-wave mixing in liquid”, *Journal of Raman Spectroscopy* **39**, 726–729 (2008), eprint: <https://analyticalsciencejournals.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/jrs.1992>.
- ⁸⁷Y. M. Cheung and S. K. Gayen, “Optical nonlinearities of tea studied by Z-scan and four-wave mixing techniques”, *J. Opt. Soc. Am. B* **11**, 636–643 (1994).
- ⁸⁸M. J. Bloemer, J. W. Haus, and P. R. Ashley, “Degenerate four-wave mixing in colloidal gold as a function of particle size”, *J. Opt. Soc. Am. B* **7**, 790–795 (1990).
- ⁸⁹P. Ewart and S. V. O’Leary, “Detection of OH in a flame by degenerate four-wave mixing”, *Opt. Lett.* **11**, 279–281 (1986).
- ⁹⁰T. Dreier and D. J. Rakestraw, “Degenerate four-wave mixing diagnostics on OH and NH radicals in flames”, *Applied Physics B* **50**, 479–485 (1990).

- ⁹¹D. J. Rakestraw, R. L. Farrow, and T. Dreier, “Two-dimensional imaging of OH in flames by degenerate four-wave mixing”, *Opt. Lett.* **15**, 709–711 (1990).
- ⁹²M. Fiorentino, P. Voss, J. Sharping, and P. Kumar, “All-fiber photon-pair source for quantum communications”, *IEEE Photonics Technology Letters* **14**, 983–985 (2002).
- ⁹³J. G. Rarity, J. Fulconis, J. Duligall, W. J. Wadsworth, and P. S. J. Russell, “Photonic crystal fiber source of correlated photon pairs”, *Opt. Express* **13**, 534–544 (2005).
- ⁹⁴J. Fulconis, O. Alibart, W. J. Wadsworth, P. S. Russell, and J. G. Rarity, “High brightness single mode source of correlated photon pairs using a photonic crystal fiber”, *Opt. Express* **13**, 7572–7582 (2005).
- ⁹⁵J. Fan, A. Migdall, and L. J. Wang, “Efficient generation of correlated photon pairs in a microstructure fiber”, *Opt. Lett.* **30**, 3368–3370 (2005).
- ⁹⁶V. Balić, D. A. Braje, P. Kolchin, G. Y. Yin, and S. E. Harris, “Generation of paired photons with controllable waveforms”, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 183601 (2005).
- ⁹⁷Y.-W. Cho, K.-K. Park, J.-C. Lee, and Y.-H. Kim, “Generation of nonclassical narrowband photon pairs from a cold rubidium cloud”, en, *Journal of the Korean Physical Society* **63**, 943–950 (2013).
- ⁹⁸K. Liao, H. Yan, J. He, S. Du, Z.-M. Zhang, and S.-L. Zhu, “Subnatural-linewidth polarization-entangled photon pairs with controllable temporal length”, en, *Physical Review Letters* **112**, 10.1103/physrevlett.112.243602 (2014).
- ⁹⁹K. Roman, “Entangling photons via four-wave mixing in a rubidium vapor cell”, Undergraduate thesis (The College of William and Mary, Williamsburg, 2015).
- ¹⁰⁰L. Zhu, X. Guo, C. Shu, H. Jeong, and S. Du, “Bright narrowband biphoton generation from a hot rubidium atomic vapor cell”, en, *Applied Physics Letters* **110**, 10.1063/1.4980073 (2017).
- ¹⁰¹D. A. Braje, V. Balić, S. Goda, G. Y. Yin, and S. E. Harris, “Frequency mixing using electromagnetically induced transparency in cold atoms”, en, *Physical Review Letters* **93**, 10.1103/physrevlett.93.183601 (2004).
- ¹⁰²Y. Wu, J. Saldana, and Y. Zhu, “Large enhancement of four-wave mixing by suppression of photon absorption from electromagnetically induced transparency”, en, *Physical Review A* **67**, 10.1103/physreva.67.013811 (2003).
- ¹⁰³S. E. Harris, J. E. Field, and A. Imamoglu, “Nonlinear optical processes using electromagnetically induced transparency”, en, *Physical Review Letters* **64**, 1107–1110 (1990).
- ¹⁰⁴R. W. Boyd, *Nonlinear optics*, edited by T. Pitts and J. Mearns, 4th ed. (Elsevier Science & Technology, 2020).

- ¹⁰⁵K.-J. Boller, A. Imamoglu, and S. E. Harris, “Observation of electromagnetically induced transparency”, en, *Physical Review Letters* **66**, 2593–2596 (1991).
- ¹⁰⁶M. Fleischhauer, A. Imamoglu, and J. P. Marangos, “Electromagnetically induced transparency: optics in coherent media”, *Rev. Mod. Phys.* **77**, 633–673 (2005).
- ¹⁰⁷J. P. Marangos, “Electromagnetically induced transparency”, en, *Journal of Modern Optics* **45**, 471–503 (1998).
- ¹⁰⁸A. Kasapi, M. Jain, G. Y. Yin, and S. E. Harris, “Electromagnetically induced transparency: propagation dynamics”, en, *Physical Review Letters* **74**, 2447–2450 (1995).
- ¹⁰⁹L. V. Hau, S. E. Harris, Z. Dutton, and C. H. Behroozi, “Light speed reduction to 17 metres per second in an ultracold atomic gas”, en, *Nature* **397**, 594–598 (1999).
- ¹¹⁰M. M. Kash, V. A. Sautenkov, A. S. Zibrov, L. Hollberg, G. R. Welch, M. D. Lukin, Y. Rostovtsev, E. S. Fry, and M. O. Scully, “Ultraslow group velocity and enhanced nonlinear optical effects in a coherently driven hot atomic gas”, en, *Physical Review Letters* **82**, 5229–5232 (1999).
- ¹¹¹S. E. Harris and L. V. Hau, “Nonlinear optics at low light levels”, en, *Physical Review Letters* **82**, 4611–4614 (1999).
- ¹¹²M. Fleischhauer and M. D. Lukin, “Dark-state polaritons in electromagnetically induced transparency”, en, *Physical Review Letters* **84**, 5094–5097 (2000).
- ¹¹³M. D. Lukin, S. F. Yelin, and M. Fleischhauer, “Entanglement of atomic ensembles by trapping correlated photon states”, en, *Physical Review Letters* **84**, 4232–4235 (2000).
- ¹¹⁴A. Matsko, Y. Rostovtsev, O. Kocharovskaya, A. Zibrov, and M. Scully, “Nonadiabatic approach to quantum optical information storage”, en, *Physical Review A* **64**, 10.1103/physreva.64.043809 (2001).
- ¹¹⁵C. Liu, Z. Dutton, C. H. Behroozi, and L. V. Hau, “Observation of coherent optical information storage in an atomic medium using halted light pulses”, en, *Nature* **409**, 490–493 (2001).
- ¹¹⁶C. Mewes and M. Fleischhauer, “Two-photon linewidth of light ‘stopping’ via electromagnetically induced transparency”, en, *Physical Review A* **66**, 10.1103/physreva.66.033820 (2002).
- ¹¹⁷D. F. Phillips, A. Fleischhauer, A. Mair, R. L. Walsworth, and M. D. Lukin, “Storage of light in atomic vapor”, en, *Physical Review Letters* **86**, 783–786 (2001).
- ¹¹⁸A. V. Turukhin, V. S. Sudarshanam, M. S. Shahriar, J. A. Musser, B. S. Ham, and P. R. Hemmer, “Observation of ultraslow and stored light pulses in a solid”, en, *Physical Review Letters* **88**, 10.1103/physrevlett.88.023602 (2001).

- ¹¹⁹G. Heinze, C. Hubrich, and T. Halfmann, “Stopped light and image storage by electromagnetically induced transparency up to the regime of one minute”, en, *Physical Review Letters* **111**, 10.1103/physrevlett.111.033601 (2013).
- ¹²⁰T. Peters, T.-P. Wang, A. Neumann, L. S. Simeonov, and T. Halfmann, “Single-photon-level narrowband memory in a hollow-core photonic bandgap fiber”, *Optics Express* **28**, 5340–5354 (2020).
- ¹²¹F. Magnus, A. L. Boatwright, A. Flodin, and R. C. Shiel, “Optical pumping and electromagnetically induced transparency in a lithium vapour”, *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics* **7**, 109–118 (2005).
- ¹²²M. Mitsunaga and N. Imoto, “Observation of an electromagnetically induced grating in cold sodium atoms”, en, *Physical Review A* **59**, 4773–4776 (1999).
- ¹²³M. Mitsunaga, M. Yamashita, and H. Inoue, “Absorption imaging of electromagnetically induced transparency in cold sodium atoms”, en, *Physical Review A* **62**, 10.1103/physreva.62.013817 (2000).
- ¹²⁴S. Balushev, N. Leinfellner, E. Korsunsky, and L. Windholz, “Electromagnetically induced transparency in a sodium vapour cell”, en, *The European Physical Journal D* **2**, 5–10 (1998).
- ¹²⁵S. Gozzini, S. Cartaleva, A. Lucchesini, C. Marinelli, L. Marmugi, D. Slavov, and T. Karaulanov, “Coherent population trapping and strong electromagnetically induced transparency resonances on the D1 line of potassium”, en, *The European Physical Journal D* **53**, 153–161 (2009).
- ¹²⁶A. Sargsyan, P. A. Petrov, T. A. Vartanyan, and D. Sarkisyan, “Electromagnetically induced transparency in potassium vapors: features and restrictions”, en, *Optics and Spectroscopy* **120**, 339–344 (2016).
- ¹²⁷Y.-C. Wei, S.-X. Lin, P.-J. Tsai, and Y.-C. Chen, “Memory-based optical polarization conversion in a double- Λ atomic system with degenerate Zeeman states”, en, *Scientific Reports* **10**, 10.1038/s41598-020-70810-8 (2020).
- ¹²⁸T. Peters, L. P. Yatsenko, and T. Halfmann, “Loading and spatially resolved characterization of a cold atomic ensemble inside a hollow-core fiber”, *Phys. Rev. A* **103**, 063302 (2021).
- ¹²⁹F. Xiao, R.-M. Guo, S. Chen, Y. Zhang, L.-M. Li, and X.-Z. Chen, “Observation of electromagnetically induced transparency in a Zeeman-sublevel system in rubidium atomic vapour”, *Chinese Physics Letters* **20**, 1257–1260 (2003).
- ¹³⁰S. Li, B. Wang, X. Yang, Y. Han, H. Wang, M. Xiao, and K. C. Peng, “Controlled polarization rotation of an optical field in multi-Zeeman-sublevel atoms”, en, *Physical Review A* **74**, 10.1103/physreva.74.033821 (2006).

- ¹³¹R. Hazra and M. M. Hossain, “Study of multi-window electromagnetically induced transparency (EIT) and related dispersive signals in V-type systems in the Zeeman sublevels of hyperfine states of ^{87}Rb D_2 line”, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* **53**, 235401 (2020).
- ¹³²Y.-C. Chen, C.-W. Lin, and I. A. Yu, “Role of degenerate Zeeman levels in electromagnetically induced transparency”, en, *Physical Review A* **61**, 10.1103/PhysRevA.61.053805 (2000).
- ¹³³P.-C. Guan, Y.-F. Chen, and I. A. Yu, “Role of degenerate Zeeman states in the storage and retrieval of light pulses”, en, *Physical Review A* **75**, 10.1103/physreva.75.013812 (2007).
- ¹³⁴Y.-F. Chen, P.-C. Kuan, S.-H. Wang, C.-Y. Wang, and I. A. Yu, “Manipulating the retrieved frequency and polarization of stored light pulses”, en, *Optics Letters* **31**, 3511 (2006).
- ¹³⁵S. N. Nikolić, M Radonjić, N. M. Lučić, A. J. Krmpot, and B. M. Jelenković, “Transient development of Zeeman electromagnetically induced transparency during propagation of Raman–Ramsey pulses through Rb buffer gas cell”, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* **48**, 045501 (2015).
- ¹³⁶A. Durrant, H. Chen, S. Hopkins, and J. Vaccaro, “Zeeman-coherence-induced transparency and gain without inversion in laser-cooled rubidium”, en, *Optics Communications* **151**, 136–146 (1998).
- ¹³⁷M. Radonjić, D. Arsenović, Z. Grujić, and B. M. Jelenković, “Coherent population trapping linewidths for open transitions: cases of different transverse laser intensity distribution”, en, *Physical Review A* **79**, 10.1103/physreva.79.023805 (2009).
- ¹³⁸A. J. Krmpot, M. Radonjić, S. M. Ćuk, S. N. Nikolić, Z. D. Grujić, and B. M. Jelenković, “Evolution of dark state of an open atomic system in constant intensity laser field”, en, *Physical Review A* **84**, 10.1103/physreva.84.043844 (2011).
- ¹³⁹S. Bao, H. Zhang, J. Zhou, L. Zhang, J. Zhao, L. Xiao, and S. Jia, “Polarization spectra of Zeeman sublevels in Rydberg electromagnetically induced transparency”, en, *Physical Review A* **94**, 10.1103/physreva.94.043822 (2016).
- ¹⁴⁰D. Petrosyan and G. Kurizki, “Symmetric photon-photon coupling by atoms with Zeeman-split sublevels”, en, *Physical Review A* **65**, 10.1103/physreva.65.033833 (2002).
- ¹⁴¹P.-J. Tsai, Y.-C. Wei, B.-H. Wu, S.-X. Lin, and Y.-C. Chen, “Theoretical study of a memory-based optical converter with degenerate Zeeman states”, en, *Physical Review A* **100**, 10.1103/physreva.100.063843 (2019).

- ¹⁴²P.-C. Guan and I. A. Yu, “Simplification of the electromagnetically induced transparency system with degenerate Zeeman states”, en, [Physical Review A](#) **76**, 10.1103/physreva.76.033817 (2007).
- ¹⁴³D. L. Fried, “Probability of getting a lucky short-exposure image through turbulence”, en, [Journal of the Optical Society of America](#) **68**, 1651 (1978).
- ¹⁴⁴H. W. Babcock, “The possibility of compensating astronomical seeing”, en, [Publications of the Astronomical Society of the Pacific](#) **65**, 229 (1953).
- ¹⁴⁵R. Davies and M. Kasper, “Adaptive optics for astronomy”, en, [Annual Review of Astronomy and Astrophysics](#) **50**, 305–351 (2012).
- ¹⁴⁶F. Merkle, P. Kern, P. Léna, F. Rigaut, J. C. Fontanella, G. Rousset, C. Boyer, J. P. Gaffard, and P. Jagourel, “Successful tests of adaptive optics”, [The Messenger](#) **58**, 1–4 (1989).
- ¹⁴⁷G. Rousset, J. C. Fontanella, P. Kern, P. Gigan, and F. Rigaut, “First diffraction-limited astronomical images with adaptive optics”, [Astronomy and Astrophysics](#) **230**, L29–L32 (1990).
- ¹⁴⁸L. M. Close, “A review of astronomical science with visible light adaptive optics”, in [SPIE Astronomical Telescopes + Instrumentation](#) (July 2016).
- ¹⁴⁹J. M. Beckers, “Adaptive optics for astronomy: principles, performance, and applications”, en, [Annual Review of Astronomy and Astrophysics](#) **31**, 13–62 (1993).
- ¹⁵⁰R. Foy and A. Labeyrie, “Feasibility of adaptive telescope with laser probe”, [Astronomy and Astrophysics](#) **152**, L29–L31 (1985).
- ¹⁵¹W. Happer, G. J. MacDonald, C. E. Max, and F. J. Dyson, “Atmospheric-turbulence compensation by resonant optical backscattering from the sodium layer in the upper atmosphere”, en, [Journal of the Optical Society of America A](#) **11**, 263 (1994).
- ¹⁵²B. Clemesha, P. Batista, and D. Simonich, “Long-term and solar cycle changes in the atmospheric sodium layer”, en, [Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics](#) **59**, 1673–1678 (1997).
- ¹⁵³C. E. Junge, O. Oldenberg, and J. T. Wasson, “On the origin of the sodium present in the upper atmosphere”, en, [Journal of Geophysical Research](#) **67**, 1027–1039 (1962).
- ¹⁵⁴J. Plane, “A reference atmosphere for the atomic sodium layer”, [Atmos. Chem. Phys](#) **470** (2010).
- ¹⁵⁵M. Lloyd-Hart, J. R. P. Angel, T. D. Groesbeck, T. Martinez, B. P. Jacobsen, B. A. McLeod, D. W. McCarthy, E. J. Hooper, E. K. Hege, and D. G. Sandler, “First astronomical images sharpened with adaptive optics using a sodium laser guide star”, en, [The Astrophysical Journal](#) **493**, 950–954 (1998).

- ¹⁵⁶A. Friedenauer, V. Karpov, D. Wei, M. Hager, B. Ernstberger, W. R. L. Clements, and W. G. Kaenders, “RFA-based 589-nm guide star lasers for ESO VLT: a paradigm shift in performance, operational simplicity, reliability, and maintenance”, in *SPIE Astronomical Telescopes + Instrumentation* (Sept. 2012).
- ¹⁵⁷F. Rigaut and E. Gendron, “Laser guide star in adaptive optics: the tilt determination problem.”, *Astronomy and Astrophysics* **261**, 677–684 (1992).
- ¹⁵⁸R. Foy, A. Migus, F. Biraben, G. Grynberg, P. R. McCullough, and M. Tallon, “The polychromatic artificial sodium star: a new concept for correcting the atmospheric tilt.”, *Astronomy and Astrophysics Supplement Series* **111**, 569 (1995).
- ¹⁵⁹H. Friedman, R. Foy, M. Talion, and A. Migus, “First results of a polychromatic artificial sodium star for the correction of tilt”, in *Adaptive optics* (1996).
- ¹⁶⁰R. Foy, M. Tallon, I. Tallon-Bosc, E. Thiébaud, J. Vaillant, F.-C. Foy, D. Robert, H. Friedman, F. Biraben, G. Grynberg, J.-P. Gex, A. Mens, A. Migus, J.-M. Weulersse, and D. J. Butler, “Photometric observations of a polychromatic laser guide star”, en, *Journal of the Optical Society of America A* **17**, 2236 (2000).
- ¹⁶¹R. Foy, P. Éric, J. Eysseric, F. Foy, T. Fusco, J. Girard, A. Le Van Suu, S. Perruchot, P. Richaud, Y. Richaud, X. Rondeau, M. Tallon, E. Thiébaud, and M. Boër, “The polychromatic laser guide star for tilt measurement: progress report of the demonstrator at Observatoire de Haute Provence”, in *Optical engineering + applications* (Sept. 2007).
- ¹⁶²J. R. Morris, “Efficient excitation of a mesospheric sodium laser guide star by intermediate-duration pulses”, en, *Journal of the Optical Society of America A* **11**, 832 (1994).
- ¹⁶³R. Holzlöhner, S. M. Rochester, D. Bonaccini Calia, D. Budker, J. M. Higbie, and W. Hackenberg, “Optimization of cw sodium laser guide star efficiency”, *Astronomy and Astrophysics* **510**, A20 (2010).
- ¹⁶⁴R. Holzlöhner, S. M. Rochester, D. Bonaccini Calia, D. Budker, T. Pfrommer, and J. M. Higbie, “Simulations of pulsed sodium laser guide stars: an overview”, in *SPIE Astronomical Telescopes + Instrumentation* (Sept. 2012).
- ¹⁶⁵S. M. Rochester, A. Otarola, C. Boyer, D. Budker, B. Ellerbroek, R. Holzlöhner, and L. Wang, “Modeling of pulsed-laser guide stars for the Thirty Meter Telescope project”, en, *Journal of the Optical Society of America B* **29**, 2176 (2012).
- ¹⁶⁶R. Rampy, D. Gavel, S. Rochester, and R. Holzlöhner, “Investigations of long pulse sodium laser guide stars”, in *SPIE Astronomical Telescopes + Instrumentation* (Sept. 2012).
- ¹⁶⁷T. Fan, T. Zhou, and Y. Feng, “Improving sodium laser guide star brightness by polarization switching”, en, *Scientific Reports* **6**, 10.1038/srep19859 (2016).

- ¹⁶⁸G. Froc, B. Attal-Tretout, E. Rosencher, V. Michau, and T. Gustafson, “Simulation of the photon return of a mono and polychromatic sodium guide star”, in [Conference on lasers and electro-optics](#) (May 28, 1999).
- ¹⁶⁹V. Bellanger, A. Courcelle, and A. Petit, “A program to compute the two-step excitation of mesospheric sodium atoms for the Polychromatic Laser Guide Star Project”, en, [Computer Physics Communications](#) **162**, 143–150 (2004).
- ¹⁷⁰H. Guillet de Chatellus, J.-P. Pique, and I. Cristina Moldovan, “Return flux budget of polychromatic laser guide stars”, en, [Journal of the Optical Society of America A](#) **25**, 400 (2008).
- ¹⁷¹王功長, 魏凱, and 李岩, “基於布洛赫方程的多色信標回波光子數數值仿真”, [物理學報 Acta Physica Sinica](#) **67**, 054204 (2018).
- ¹⁷²H. A. van der Vorst, “Bi-CGSTAB: a fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems”, en, [SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing](#) **13**, 631–644 (1992).
- ¹⁷³A. C. Hindmarsh, R. Serban, C. J. Balos, D. J. Gardner, D. R. Reynolds, and C. S. Woodward, *User documentation for CVODE*, <https://sundials.readthedocs.io/en/latest/cvode>, v6.6.1, 2023.
- ¹⁷⁴K. Schuster, S. Unger, C. Aichele, F. Lindner, S. Grimm, D. Litzkendorf, J. Kobelke, J. Bierlich, K. Wondraczek, and H. Bartelt, “Material and technology trends in fiber optics”, [Advanced Optical Technologies](#) **3**, 447–468 (2014).
- ¹⁷⁵P. Russell, “Photonic crystal fibers”, [Science](#) **299**, 358–362 (2003), eprint: <https://www.science.org/doi/pdf/10.1126/science.1079280>.
- ¹⁷⁶R. Buczyński, “Photonic crystal fibers”, English, [Acta Physica Polonica A](#) **106**, 141–167 (2004).
- ¹⁷⁷F. Poletti, N. G. R. Broderick, D. J. Richardson, and T. M. Monro, “The effect of core asymmetries on the polarization properties of hollow core photonic bandgap fibers”, [Opt. Express](#) **13**, 9115–9124 (2005).
- ¹⁷⁸J. M. Fini, J. W. Nicholson, B. Mangan, L. Meng, R. S. Windeler, E. M. Monberg, A. DeSantolo, F. V. DiMarcello, and K. Mukasa, “Polarization maintaining single-mode low-loss hollow-core fibres”, [Nature Communications](#) **5**, 5085 (2014).
- ¹⁷⁹D. Tentori and A. Garcia-Weidner, “Jones birefringence in twisted single-mode optical fibers”, en, [Optics Express](#) **21**, 31725 (2013).
- ¹⁸⁰D. A. Steck, *Rubidium 87 D line data*, available online at <http://steck.us/alkalidata>, 2019.
- ¹⁸¹J. R. Magnus and H. Neudecker, “The elimination matrix: some lemmas and applications”, [SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods](#) **1**, 422–449 (1980).

- ¹⁸²J. R. Magnus and H. Neudecker, *Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics* (John Wiley & Sons, 2019).
- ¹⁸³R. Crosbie and W Heyes, “Variable-step integration methods for simulation applications”, *Applied Mathematical Modelling* **1**, 137–140 (1976).
- ¹⁸⁴L. V. Blake and N. R. L. W. DC, “A modified Simpson’s rule and FORTRAN subroutine for cumulative numerical integration of a function defined by data point”, NHL Memorandum Report **2231** (1971).
- ¹⁸⁵F. Blatt, T. Halfmann, and T. Peters, “One-dimensional ultracold medium of extreme optical depth”, *Optics Letters* **39**, 446–449 (2014).
- ¹⁸⁶C. Dumitrache, J. Rath, and A. Yalin, “High power spark delivery system using hollow core kagome lattice fibers”, en, *Materials* **7**, 5700–5710 (2014).
- ¹⁸⁷E. Hecht, *Optics*, 5th ed. (Pearson Education Limited, 2017).
- ¹⁸⁸C. Sibilia, T. M. Benson, M. Marciniak, and T. Szoplik, *Photonic crystals: physics and technology* (Springer, 2008).
- ¹⁸⁹C. W. Hsu, B. Zhen, A. D. Stone, J. D. Joannopoulos, and M. Soljačić, “Bound states in the continuum”, en, *Nature Reviews Materials* **1**, 10.1038/natrevmats.2016.48 (2016).
- ¹⁹⁰B. Debord, F. Amrani, L. Vincetti, F. Gérôme, and F. Benabid, “Hollow-core fiber technology: the rising of “gas photonics””, *Fibers* **7**, 16 (2019).
- ¹⁹¹E. A. Pringle and F. Moynier, “Rubidium isotopic composition of the Earth, meteorites, and the Moon: evidence for the origin of volatile loss during planetary accretion”, *Earth and Planetary Science Letters* **473**, 62–70 (2017).
- ¹⁹²F. Kondev, M. Wang, W. Huang, S Naimi, and G Audi, “The NUBASE2020 evaluation of nuclear physics properties”, *Chinese Physics C* **45**, 030001 (2021).
- ¹⁹³H. Haken and H. C. Wolf, *Atomic and quantum physics*, trans. by W. D. Brewer, 2nd ed. (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1984).
- ¹⁹⁴M. Ol’Shanii, Y. Ovchinnikov, and V. Letokhov, “Laser guiding of atoms in a hollow optical fiber”, *Optics Communications* **98**, 77–79 (1993).
- ¹⁹⁵M. J. Renn, D. Montgomery, O. Vdovin, D. Z. Anderson, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, “Laser-guided atoms in hollow-core optical fibers”, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3253–3256 (1995).
- ¹⁹⁶M. Bajcsy, S. Hofferberth, V. Balic, T. Peyronel, M. Hafezi, A. S. Zibrov, V. Vuletic, and M. D. Lukin, “Efficient all-optical switching using slow light within a hollow fiber”, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 203902 (2009).

- ¹⁹⁷S. Vorrath, S. Möller, P. Windpassinger, K. Bongs, and K. Sengstock, “Efficient guiding of cold atoms through a photonic band gap fiber”, *New Journal of Physics* **12**, 123015 (2010).
- ¹⁹⁸H. Walther, B. T. H. Varcoe, B.-G. Englert, and T. Becker, “Cavity quantum electrodynamics”, *Reports on Progress in Physics* **69**, 1325 (2006).
- ¹⁹⁹B. M. Sparkes, J. Bernu, M. Hosseini, J. Geng, Q. Glorieux, P. A. Altin, P. K. Lam, N. P. Robins, and B. C. Buchler, “Gradient echo memory in an ultra-high optical depth cold atomic ensemble”, *New Journal of Physics* **15**, 085027 (2013).
- ²⁰⁰H. Ito, T. Nakata, K. Sakaki, M. Ohtsu, K. I. Lee, and W. Jhe, “Laser spectroscopy of atoms guided by evanescent waves in micron-sized hollow optical fibers”, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4500–4503 (1996).
- ²⁰¹M. J. Renn, A. A. Zozulya, E. A. Donley, E. A. Cornell, and D. Z. Anderson, “Optical-dipole-force fiber guiding and heating of atoms”, *Phys. Rev. A* **55**, 3684–3696 (1997).
- ²⁰²S. Ghosh, A. R. Bhagwat, C. K. Renshaw, S. Goh, A. L. Gaeta, and B. J. Kirby, “Low-light-level optical interactions with Rubidium vapor in a photonic band-gap fiber”, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 023603 (2006).
- ²⁰³P. Light, F. Benabid, F. Couny, M. Maric, and A. Luiten, “Electromagnetically induced transparency in Rb-filled coated hollow-core photonic crystal fiber”, *Optics letters* **32**, 1323–1325 (2007).
- ²⁰⁴T. D. Bradley, J. Jouin, J. J. McFerran, P. Thomas, F. Gerome, and F. Benabid, “Extended duration of Rubidium vapor in aluminosilicate ceramic coated hypocycloidal core Kagome HC-PCF”, *J. Lightwave Technol.* **32**, 2486–2491 (2014).
- ²⁰⁵J. D. Miller, R. A. Cline, and D. J. Heinzen, “Far-off-resonance optical trapping of atoms”, *Phys. Rev. A* **47**, R4567–R4570 (1993).
- ²⁰⁶P. Palittapongarnpim, A. MacRae, and A. I. Lvovsky, “Note: a monolithic filter cavity for experiments in quantum optics”, *Review of Scientific Instruments* **83**, 066101 (2012), eprint: https://pubs.aip.org/aip/rsi/article-pdf/doi/10.1063/1.4726458/13844281/066101_1_online.pdf.
- ²⁰⁷A. Ahlrichs, C. Berkemeier, B. Sprenger, and O. Benson, “A monolithic polarization-independent frequency-filter system for filtering of photon pairs”, *Applied Physics Letters* **103**, 241110 (2013), eprint: https://pubs.aip.org/aip/apl/article-pdf/doi/10.1063/1.4846316/10144641/241110_1_online.pdf.
- ²⁰⁸T. J. Steiner, J. E. Castro, L. Chang, Q. Dang, W. Xie, J. Norman, J. E. Bowers, and G. Moody, “Ultrabright entangled-photon-pair generation from an AlGaAs-on-insulator microring resonator”, *PRX Quantum* **2**, 010337 (2021).

- ²⁰⁹S. Du, J. Wen, and M. H. Rubin, “Narrowband biphoton generation near atomic resonance”, *J. Opt. Soc. Am. B* **25**, C98–C108 (2008).
- ²¹⁰P. Kolchin, “Electromagnetically-induced-transparency-based paired photon generation”, *Phys. Rev. A* **75**, 033814 (2007).
- ²¹¹N. V. Corzo, J. Raskop, A. Chandra, A. S. Sheremet, B. Gouraud, and J. Laurat, “Waveguide-coupled single collective excitation of atomic arrays”, *Nature* **566**, 359–362 (2019).
- ²¹²S. Fasel, O. Alibart, S. Tanzilli, P. Baldi, A. Beveratos, N. Gisin, and H. Zbinden, “High-quality asynchronous heralded single-photon source at telecom wavelength”, *New Journal of Physics* **6**, 163 (2004).
- ²¹³A. Seri, G. Corrielli, D. Lago-Rivera, A. Lenhard, H. de Riedmatten, R. Osellame, and M. Mazzeo, “Laser-written integrated platform for quantum storage of heralded single photons”, *Optica* **5**, 934–941 (2018).
- ²¹⁴P. Grünwald, “Effective second-order correlation function and single-photon detection”, *New Journal of Physics* **21**, 093003 (2019).
- ²¹⁵P. P. Rohde and T. C. Ralph, “Modelling photo-detectors in quantum optics”, en, *Journal of Modern Optics* **53**, 1589–1603 (2006).
- ²¹⁶O. A. Ivanova, T. S. Iskhakov, A. N. Penin, and M. V. Chekhova, “Multiphoton correlations in parametric down-conversion and their measurement in the pulsed regime”, *Quantum Electronics* **36**, 951–956 (2006).
- ²¹⁷J.-M. Chen, C.-Y. Hsu, W.-K. Huang, S.-S. Hsiao, F.-C. Huang, Y.-H. Chen, C.-S. Chuu, Y.-C. Chen, Y.-F. Chen, and I. A. Yu, “Room-temperature biphoton source with a spectral brightness near the ultimate limit”, *Phys. Rev. Res.* **4**, 023132 (2022).
- ²¹⁸L. Blanco and F. García de Abajo, “Spontaneous emission enhancement near nanoparticles”, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* **89**, VII Electromagnetic and Light Scattering by Non-Spherical Particles: Theory, Measurement, and Applications, 37–42 (2004).
- ²¹⁹S. Haroche and D. Kleppner, “Cavity quantum electrodynamics”, *Physics Today* **42**, 24–30 (1989), eprint: https://pubs.aip.org/physicstoday/article-pdf/42/1/24/8300663/24_1_online.pdf.
- ²²⁰R. H. Dicke, “Coherence in spontaneous radiation processes”, *Phys. Rev.* **93**, 99–110 (1954).
- ²²¹B. Bellomo, G. L. Giorgi, G. M. Palma, and R. Zambrini, “Quantum synchronization as a local signature of super- and subradiance”, *Phys. Rev. A* **95**, 043807 (2017).
- ²²²N. Skribanowitz, I. P. Herman, J. C. MacGillivray, and M. S. Feld, “Observation of Dicke superradiance in optically pumped HF gas”, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 309–312 (1973).

- ²²³R. A. de Oliveira, M. S. Mendes, W. S. Martins, P. L. Saldanha, J. W. R. Tabosa, and D. Felinto, “Single-photon superradiance in cold atoms”, *Phys. Rev. A* **90**, 023848 (2014).
- ²²⁴S. L. Bromley, B. Zhu, M. Bishof, X. Zhang, T. Bothwell, J. Schachenmayer, T. L. Nicholson, R. Kaiser, S. F. Yelin, M. D. Lukin, A. M. Rey, and J. Ye, “Collective atomic scattering and motional effects in a dense coherent medium”, *Nature Communications* **7**, 11039 (2016).
- ²²⁵S. J. Roof, K. J. Kemp, M. D. Havey, and I. M. Sokolov, “Observation of single-photon superradiance and the cooperative Lamb shift in an extended sample of cold atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 073003 (2016).
- ²²⁶M. O. Araújo, I. Krešić, R. Kaiser, and W. Guerin, “Superradiance in a large and dilute cloud of cold atoms in the linear-optics regime”, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 073002 (2016).
- ²²⁷A. Goban, C.-L. Hung, J. D. Hood, S.-P. Yu, J. A. Muniz, O. Painter, and H. J. Kimble, “Superradiance for atoms trapped along a photonic crystal waveguide”, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 063601 (2015).
- ²²⁸S. Okaba, D. Yu, L. Vincetti, F. Benabid, and H. Katori, “Superradiance from lattice-confined atoms inside hollow core fibre”, *Communications Physics* **2**, 136 (2019).
- ²²⁹R. Pennetta, M. Blaha, A. Johnson, D. Lechner, P. Schneeweiss, J. Volz, and A. Rauschenbeutel, “Collective radiative dynamics of an ensemble of cold atoms coupled to an optical waveguide”, *Phys. Rev. Lett.* **128**, 073601 (2022).
- ²³⁰P. Solano, P. Barberis-Blostein, F. K. Fatemi, L. A. Orozco, and S. L. Rolston, “Super-radiance reveals infinite-range dipole interactions through a nanofiber”, *Nature Communications* **8**, 1857 (2017).
- ²³¹M. Scheibner, T. Schmidt, L. Worschech, A. Forchel, G. Bacher, T. Passow, and D. Hommel, “Superradiance of quantum dots”, *Nature Physics* **3**, 106–110 (2007).
- ²³²J. A. Mlynek, A. A. Abdumalikov, C. Eichler, and A. Wallraff, “Observation of Dicke superradiance for two artificial atoms in a cavity with high decay rate”, *Nature Communications* **5**, 5186 (2014).
- ²³³R. Monshouwer, M. Abrahamsson, F. van Mourik, and R. van Grondelle, “Superradiance and exciton delocalization in bacterial photosynthetic light-harvesting systems”, *The Journal of Physical Chemistry B* **101**, 7241–7248 (1997), eprint: <https://doi.org/10.1021/jp963377t>.
- ²³⁴R. Bonifacio and L. A. Lugiato, “Cooperative radiation processes in two-level systems: superfluorescence”, *Phys. Rev. A* **11**, 1507–1521 (1975).
- ²³⁵M. Gross and S. Haroche, “Superradiance: an essay on the theory of collective spontaneous emission”, en, *Physics Reports* **93**, 301–396 (1982).

- ²³⁶H. Tanji-Suzuki, I. D. Leroux, M. H. Schleier-Smith, M. Cetina, A. T. Grier, J. Simon, and V. Vuletić, “Interaction between atomic ensembles and optical resonators: classical description”, in *Advances in atomic, molecular, and optical physics*, Vol. 60, edited by E. Arimondo, P. Berman, and C. Lin, Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics (Academic Press, 2011) Chap. 4, pp. 201–237.
- ²³⁷D. Polder, M. F. H. Schuurmans, and Q. H. F. Vreken, “Superfluorescence: quantum-mechanical derivation of Maxwell-Bloch description with fluctuating field source”, *Phys. Rev. A* **19**, 1192–1203 (1979).
- ²³⁸R. Pennetta, D. Lechner, M. Blaha, A. Rauschenbeutel, P. Schneeweiss, and J. Volz, “Observation of coherent coupling between super- and subradiant states of an ensemble of cold atoms collectively coupled to a single propagating optical mode”, in *Physical Review Letters* **128**, 10.1103/physrevlett.128.203601 (2022).
- ²³⁹M. G. Raymer and J. Mostowski, “Stimulated Raman scattering: unified treatment of spontaneous initiation and spatial propagation”, *Physical Review A* **24**, 1980–1993 (1981).
- ²⁴⁰L. Ostermann, C. Meignant, C. Genes, and H. Ritsch, “Super- and subradiance of clock atoms in multimode optical waveguides”, *New Journal of Physics* **21**, 025004 (2019).
- ²⁴¹D. J. Heinzen, J. E. Thomas, and M. S. Feld, “Coherent ringing in superfluorescence”, *Physical Review Letters* **54**, 10.1103/PhysRevLett.54.677 (1985).
- ²⁴²T. Peters and A. Bruns, *Superfluorescent bursts emitted from an atomic ensemble coupled to a hollow-core fiber*, July 2023.
- ²⁴³F. Haake, H. King, G. Schröder, J. Haus, and R. Glauber, “Fluctuations in superfluorescence”, *Physical Review A* **20**, 10.1103/PhysRevA.20.2047 (1979).
- ²⁴⁴M. G. Raymer and I. A. Walmsley, “Quantum statistics of stimulated Raman scattering”, in *Coherence and quantum optics v* (Springer US, Boston, MA, 1984), pp. 63–70.
- ²⁴⁵F. Haake, J. Haus, H. King, G. Schröder, and R. Glauber, “Delay-time statistics and inhomogeneous line broadening in superfluorescence”, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 558–561 (1980).
- ²⁴⁶F. T. Arecchi and E. Courtens, “Cooperative phenomena in resonant electromagnetic propagation”, *Physical Review A* **2**, 1730–1737 (1970).
- ²⁴⁷R. Bachelard, N. Piovella, and P. W. Courteille, “Cooperative scattering and radiation pressure force in dense atomic clouds”, *Physical Review A* **84**, 013821 (2011).
- ²⁴⁸T. Bienaimé, R. Bachelard, N. Piovella, and R. Kaiser, “Cooperativity in light scattering by cold atoms”, *Fortschritte der Physik* **61**, 377–392 (2013), eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/prop.201200089>.

- ²⁴⁹R. Bachelard, N. Piovella, W. Guerin, and R. Kaiser, “Collective effects in the radiation pressure force”, *Physical Review A* **94**, 033836 (2016).
- ²⁵⁰M. S. Malcuit, J. J. Maki, D. J. Simkin, and R. W. Boyd, “Transition from superfluorescence to amplified spontaneous emission”, *Physical Review Letters* **59**, 10.1103/PhysRevLett.59.1189 (1987).
- ²⁵¹M. Houde, A. Mathews, and F. Rajabi, “Explaining fast radio bursts through Dicke’s superradiance”, en, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **475**, 514–522 (2018).
- ²⁵²K. Cong, Q. Zhang, Y. Wang, G. T. Noe, A. Belyanin, and J. Kono, “Dicke superradiance in solids [invited]”, en, *Journal of the Optical Society of America B* **33**, C80 (2016).
- ²⁵³C. Bradac, M. T. Johnsson, M. v. Breugel, B. Q. Baragiola, R. Martin, M. L. Juan, G. K. Brennen, and T. Volz, “Room-temperature spontaneous superradiance from single diamond nanocrystals”, en, *Nature Communications* **8**, 10.1038/s41467-017-01397-4 (2017).
- ²⁵⁴A. S. Sheremet, M. I. Petrov, I. V. Iorsh, A. V. Poshakinskiy, and A. N. Poddubny, “Waveguide quantum electrodynamics: collective radiance and photon-photon correlations”, en, *Reviews of Modern Physics* **95**, 10.1103/revmodphys.95.015002 (2023).
- ²⁵⁵D. Meiser, J. Ye, D. R. Carlson, and M. J. Holland, “Prospects for a millihertz-linewidth laser”, en, *Physical Review Letters* **102**, 10.1103/physrevlett.102.163601 (2009).
- ²⁵⁶M. A. Norcia, M. N. Winchester, J. R. K. Cline, and J. K. Thompson, “Superradiance on the millihertz linewidth strontium clock transition”, en, *Science Advances* **2**, 10.1126/sciadv.1601231 (2016).
- ²⁵⁷A. Asenjo-Garcia, M. Moreno-Cardoner, A. Albrecht, H. Kimble, and D. Chang, “Exponential improvement in photon storage fidelities using subradiance and ‘Selective Radiance’ in atomic arrays”, en, *Physical Review X* **7**, 10.1103/physrevx.7.031024 (2017).
- ²⁵⁸M. Keller, B. Lange, K. Hayasaka, W. Lange, and H. Walther, “Continuous generation of single photons with controlled waveform in an ion-trap cavity system”, En, *Nature* **431**, 10.1038/nature02961 (2004).
- ²⁵⁹K. A. Fischer, R. Trivedi, V. Ramasesh, I. Siddiqi, and J. Vučković, “Scattering into one-dimensional waveguides from a coherently-driven quantum-optical system”, *Quantum* **2**, 10.22331/q-2018-05-28-69 (2018).

- ²⁶⁰M. Pechal, L. Huthmacher, C. Eichler, S. Zeytinoglu, A. A. Abdumalikov, S. Berger, A. Wallraff, and S. Filipp, “Microwave-controlled generation of shaped single photons in circuit quantum electrodynamics”, *Phys. Rev. X* **4**, 041010 (2014).
- ²⁶¹V. Averchenko, D. Sych, C. Marquardt, and G. Leuchs, “Efficient generation of temporally shaped photons using nonlocal spectral filtering”, *Phys. Rev. A* **101**, 013808 (2020).
- ²⁶²V. Averchenko, D. Sych, G. Schunk, U. Vogl, C. Marquardt, and G. Leuchs, “Temporal shaping of single photons enabled by entanglement”, *Phys. Rev. A* **96**, 043822 (2017).
- ²⁶³P. Forn-Díaz, C. W. Warren, C. W. S. Chang, A. M. Vadiraj, and C. M. Wilson, “On-demand microwave generator of shaped single photons”, *Phys. Rev. Appl.* **8**, 054015 (2017).
- ²⁶⁴G. S. Vasilev, D. Ljunggren, and A. Kuhn, “Single photons made-to-measure”, *New Journal of Physics* **12**, 063024 (2010).
- ²⁶⁵P. B. R. Nisbet-Jones, J. Dille, D. Ljunggren, and A. Kuhn, “Highly efficient source for indistinguishable single photons of controlled shape”, *New Journal of Physics* **13**, 103036 (2011).
- ²⁶⁶J.-R. Álvarez, M. Ijspeert, O. Barter, B. Yuen, T. D. Barrett, D. Stuart, J. Dille, A. Holleczek, and A. Kuhn, “How to administer an antidote to Schrödinger’s cat”, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* **55**, 054001 (2022).
- ²⁶⁷E. Rephaeli and S. Fan, “Stimulated emission from a single excited atom in a waveguide”, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 143602 (2012).
- ²⁶⁸J. I. Cirac, P. Zoller, H. J. Kimble, and H. Mabuchi, “Quantum state transfer and entanglement distribution among distant nodes in a quantum network”, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 3221–3224 (1997).
- ²⁶⁹C. Gardiner and P. Zoller, *Quantum noise, A handbook of markovian and non-markovian quantum stochastic methods with applications to quantum optics*, English, 3, Springer Series in Synergetic (Springer Berlin / Heidelberg, 2010).
- ²⁷⁰R. Loudon, *The quantum theory of light*, English, 3rd ed. (Oxford University Press, 2000).
- ²⁷¹H.-P. Breuer and F. Petruccione, *The theory of open quantum systems*, English (Oxford University Press, 2002).
- ²⁷²C. Tserkezis, A. I. Fernández-Domínguez, P. A. D. Gonçalves, F. Todisco, J. D. Cox, K. Busch, N. Stenger, S. I. Bozhevolnyi, N. A. Mortensen, and C. Wolff, “On the applicability of quantum-optical concepts in strong-coupling nanophotonics”, *Reports on Progress in Physics* **83**, 082401 (2020).

- ²⁷³V. Dorier, S. Guérin, and H.-R. Jauslin, “Critical review of quantum plasmonic models for finite-size media”, en, [Nanophotonics](#) **9**, 3899–3907 (2020).
- ²⁷⁴B. Rousseaux, D. Dzsotjan, G. Colas des Francs, H. R. Jauslin, C. Couteau, and S. Guérin, “Adiabatic passage mediated by plasmons: a route towards a decoherence-free quantum plasmonic platform”, [Phys. Rev. B](#) **93**, 045422 (2016).
- ²⁷⁵A. Saharyan, J.-R. Álvarez, T. H. Doherty, A. Kuhn, and S. Guérin, “Light-matter interaction in open cavities with dielectric stacks”, en, [Applied Physics Letters](#) **118**, 154002 (2021).
- ²⁷⁶S. M. Dutra, *Cavity quantum electrodynamics, The strange theory of light in a box*, edited by D. R. Vij, Wiley Series in Lasers and Applications (Wiley, Dec. 2004).
- ²⁷⁷W. Vogel and D.-G. Welsch, *Quantum optics*, 3rd ed. (Wiley, 2006).
- ²⁷⁸S. Murray III, M. O. Scully, and W. E. Lamb Jr., *Laser physics* (Avalon Publishing, 1978).
- ²⁷⁹L. Knöll, W. Vogel, and D.-G. Welsch, “Resonators in quantum optics: a first-principles approach”, en, [Physical Review A](#) **43**, 543–553 (1991).
- ²⁸⁰B. J. Dalton, S. M. Barnett, and B. M. Garraway, “Theory of pseudomodes in quantum optical processes”, en, [Physical Review A](#) **64**, 10.1103/physreva.64.053813 (2001).
- ²⁸¹D. Griffiths and S. Walborn, “Dirac deltas and discontinuous functions”, en, [American Journal of Physics](#) **67**, 446–447 (1999).
- ²⁸²K. J. Blow, R. Loudon, S. J. D. Phoenix, and T. J. Shepherd, “Continuum fields in quantum optics”, en, [Physical Review A](#) **42**, 4102–4114 (1990).
- ²⁸³R. Graham and H. Haken, “Quantum theory of light propagation in a fluctuating laser-active medium”, en, [Zeitschrift für Physik A Hadrons and nuclei](#) **213**, 420–450 (1968).
- ²⁸⁴M. G. Raymer and C. J. McKinstrie, “Quantum input-output theory for optical cavities with arbitrary coupling strength: application to two-photon wave-packet shaping”, en, [Physical Review A](#) **88**, 10.1103/physreva.88.043819 (2013).
- ²⁸⁵A. Gogyan, S. Guérin, C. Leroy, and Y. Malakyan, “Deterministic production of N -photon states from a single atom-cavity system”, en, [Physical Review A](#) **86**, 10.1103/physreva.86.063801 (2012).
- ²⁸⁶W. H. Louisell, *Quantum statistical properties of radiation* (Wiley, 1973).
- ²⁸⁷H. J. Carmichael, *Statistical methods in quantum optics, Master equations and Fokker-Planck equations*, Vol. 1, Texts and Monographs in Physics (Springer Berlin Heidelberg, 1999).

- ²⁸⁸A. Kuhn, M. Hennrich, T. Bondo, and G. Rempe, “Controlled generation of single photons from a strongly coupled atom-cavity system”, en, [Applied Physics B](#) **69**, 373–377 (1999).
- ²⁸⁹B. W. Shore, *Manipulating quantum structures using laser pulses* (Cambridge University Press, Sept. 2011).
- ²⁹⁰D. V. Reddy and M. G. Raymer, “Photonic temporal-mode multiplexing by quantum frequency conversion in a dichroic-finesse cavity”, en, [Optics Express](#) **26**, 28091 (2018).
- ²⁹¹S. Krastanov, K. Jacobs, G. Gilbert, D. R. Englund, and M. Heuck, “Controlled-phase gate by dynamic coupling of photons to a two-level emitter”, en, [npj Quantum Information](#) **8**, 10.1038/s41534-022-00604-5 (2022).